

# 創価経済論集

## 季刊

*THE SOKA ECONOMIC STUDIES: VOL. XLIX NO. 1·2·3·4/MARCH 2020*

### 釜国男教授退職記念号

- 釜国男先生退職記念号に寄せて…………… 勘坂純市 (iii)  
 研究一筋の人生、釜国男先生の退職に寄せて…………… 小林孝次 (v)

### 論文

- 世代重複モデルの数値解析（計算経済学の研究その18）…………… 釜国男 (1)  
 ポントリヤーギンの最大値原理…………… 板垣有記輔 (13)  
 気候変動がスリランカのコメ生産、国民経済に及ぼす影響  
 —応用一般均衡モデルによる分析—  
 …………… 齋藤之美・齋藤勝宏・佐藤秀保・チャトラワインツンガ (39)  
 Asymptotic Theory for Robust Autocorrelation Test under Stochastic Volatility  
 …………… Manabu ASAI (55)  
 Analyzing Sunspot Number via Gegenbauer Long Memory Process  
 with Correlated Additive Noise …………… Manabu ASAI (77)  
 The Effect of Role Origin on Bidding Behavior in an Asymmetric All-Pay Auction:  
 An Experiment…………… Hironori OTSUBO (87)

The Soka Economic Association

President

Junichi KANZAKA

Editors

Konomi SAITO

Manabu ASAI

Nobuyuki KANAZAWA

Daigo NAKATA

Takayuki SAKUMA

Taeko YASUTAKE

The Soka Economic Association, affiliated to the Department of Economics, Soka University, was established in 1971. The purpose of the Association is to support and encourage research and education in Economics, Economic History, Economic Policy, Statistics, and closely related problems. The Soka Economic Studies has been published quarterly by the Association with papers mainly contributed by the faculty members of the Department. All communications relating to subscriptions and memberships should be addressed to :

The Soka Economic Association, Soka University

1-236 Tangi-machi, Hachioji, Tokyo 192-8577



釜 国 男 先 生



## 釜国男先生退職記念号に寄せて

勘 坂 純 市 \*

釜国男先生は、1981年にアメリカ・ペンシルバニア大学で博士号（Ph.D）を修得後、1983年より、経済理論科目担当の助教授として創価大学に赴任された。その後、1991年に教授に昇任され、「マクロ経済学」、「中級マクロ経済学」、「日本経済論」等の科目を担当され、学生の教育に取り組んでこられた。

しかし、釜先生といって思い起こされるのは、やはり、その研究へのあくなき情熱であろう。ながく『創価経済論集』に継続的に論文を投稿してくださり、近年は、それらの研究をもとにくつかの著作を公刊されている。まさに、後続くわれわれに研究者としての模範を示してくださったといえる。

今後も、釜先生が示してくださった研究者としての姿勢を忘れることなく、経済学部的发展に取り組んでまいりたい。

---

\* 創価大学経済学部長、教授



# 研究一筋の人生、釜国男先生の退職に寄せて

Honoring Professor Kunio KAMA in His Retirement :  
A Distinguished Scholar Devoting His Life to Academic Research

小 林 孝 次\*  
Koji KOBAYASHI

釜先生は、2018年3月、35年にわたって奉職された創価大学を退職された。まさに研究一筋の人生であり、現在もその研究を続けられているとお伺いしている。

1983年4月、釜先生は、本学の経済学部助教授として、私の恩師の山本拓先生が退職した後任として当時としては数少ない実証研究をされるエキスパートとして着任された。釜先生が本学に推薦された理由は、精力的に論文を執筆される研究者であることと伺っている。まさにその通り、釜先生は1点のブレもなく、研究業績にあるように着任以来『創価経済論集』のほぼ毎号に論文を投稿されていらっしゃる。近年にはそれらを集大成して、著書を連続的に公刊されている。

先生は、東大大学院ではケインズ派の内田忠夫先生に薫陶を受け、アメリカのペンシルベニア大学大学院では合理的期待のマクロ経済学を学ばれた。Ph.Dを取得されて帰国されたときには、ケインジアンから古典派へ改宗かと揶揄されたと言われたと釜先生自身がおっしゃっていた。

ペンシルベニアでは、有名な KAMA's Triangle という言葉があったようで、それは先生を探すには、教室、図書館、学生寮へ行けば必ず見つかるという意味の三角形であったようだが、留学先でも学びに徹せられた生活であったようである。

さらに、驚くべきことは、熊大のときと東大院在学中に2回、国家公務員上級職試験に合格されているとのこと、そしてそれらをすべて蹴って、学究の道を一筋に貫いてこられたことである。

釜先生の本学での着任が、私が創価大学応用経済研究所の助手として採用されたのと同時期であったこともあり、当時同研究所で行われていたサージェント研究会（故加藤寛孝先生を中心に T. J. Sargent の *Macroeconomic Theory* を読み進めていく研究会で数年間続いた）にて、一緒に研究をさせていただいた。また釜先生が作成されたシムズ・テストのコンピュータプログラムを閲覧させていただいたことなど、私は釜先生から研究上数々のご指導をいただいた。とりわけ今でも忘れられない出来事は、私が『創価経済論集』に初めて研究ノートを投稿し、掲載された際に、初歩的な記述のミスをしてしまい、釜先生から「君は何回書き直し、校正をして提出したんだ。

---

\* 創価大学経済学部教授

1度パブリッシュされたものは、2度と書き直せないのだよ」とご忠告をいただいたことである。このご指摘は、私自身が論文作成等の際に今でも気をつけている、大事な留意事項としている。

先生が50代になられたときに40代とは違い疲れる、そして60代になられたときは50代と違い、体がしんどいとおっしゃっていたが、校務から開放された今そしてこれから、益々お元気で、精力的にご研究を続けていかれんことを期待し、先生への感謝と御礼を込めて、筆を置くことにしたい。いろいろとお世話になりました。ありがとうございました。



## 釜国男先生の略歴・著書・論文

### 1 略歴

1948年 3 月	熊本県に生まれる
1972年 3 月	熊本大学法文学部法学科卒業
1977年 6 月	東京大学大学院経済学研究科博士課程単位取得退学
1981年 6 月	ペンシルベニア大学大学院Ph.D.
1981年 9 月～ 83年 3 月	三菱総合研究所研究員
1983年 4 月	創価大学経済学部助教授
1985年 1 月～ 6 月	ニューヨーク州立大学フルブライト派遣講師
1991年 4 月	創価大学経済学部教授
2018年 3 月	同大学退職、名誉教授

### 2 著書

- 『経済行動の数量分析』多賀出版、2001年  
 S・ウィリアムソン『マクロ経済学 I, II』東洋経済新報社、2012年  
 『経済モデルの数値解析』多賀出版、2015年  
 『コンピュテーショナル・エコノミクス』多賀出版、2018年

### 3 論文

- 「The Determination of Interest Rates in Japan, 1967–1978」『経済研究』第32巻 1 号, 1981.1  
 「Money, Income, and Causality in the Japanese Economy」『日本経済研究』第11巻, 1982.3  
 「戦前の日本における貨幣、所得および物価の関係 — 統計的因果関係テストの応用」『創価経済論集』第13巻 1 号, 1983.6  
 「不完全情報の下での貨幣政策の理論」『創価経済論集』第13巻 3 号, 1983.12  
 「合理的予想の下での企業の生産および在庫行動の計量分析」『創価経済論集』第14巻 1 号, 1984.6  
 「日本における貨幣需要関数の計測 — 若干の予備的結果」『創価経済論集』第14巻 3 号, 1984.12  
 「A Note on the Optimal Choice of the Monetary Policy Rule in the Lucas Business Cycle Model」『創価経済論集』第14巻 4 号, 1985.3  
 「日本におけるマクロ合理的期待仮説の統計的検証」大西博との共著『日本経済研究』第14巻, 1985.3

- 「日本における予想外のマネーサプライ変動と産出量または失業率の関係」『創価経済論集』第15巻1号, 1985.6
- 「英米両国におけるギブソンパラドックスとフィッシャー方程式の安定性について」『創価経済論集』第15巻2.3.4号, 1986.3
- 「日本における貨幣需要関数の安定性について」『創価経済論集』第16巻1.2号, 1986.9
- 「VARモデルによる米・英経済のマクロ経済分析」『創価経済論集』第16巻4号, 1987.3
- 「日本における貨幣供給プロセスの実証分析」『創価経済論集』第17巻1号, 1987.6
- 「金融政策の目標と効果」『日本経済研究』第17巻, 1987.12
- 「戦後日本の金融史(1) 一昭和46-49年」『創価経済論集』第17巻4号, 1988.3
- 「府県別データによる貨幣需要の分析」『創価経済論集』第18巻2号, 1988.9
- 「貨幣、信用と経済活動」『創価経済論集』第18巻3号, 1988.12
- 「貨幣と生産—貨幣を含む生産関数の推計—」『創価経済論集』第19巻1号, 1989.6
- 書評小宮隆太郎著『現代日本経済—マクロ的展開と国際経済関係』『創価経済論集』第19巻2号, 1989.9
- 「株価と経済活動」『創価経済論集』第19巻3号, 1989.12
- 「AD/ASによる景気変動の分析」『創価経済論集』第19巻4号, 1990.6
- 「需要要因からなるフィリップス曲線の計測」『創価経済論集』第20巻2.3.4号, 1991.3
- 「ファジィによるクライン戦間期モデルの制御(I)」『創価経済論集』第21巻1号, 1991.6
- 「ファジィによるクライン戦間期モデルの制御(II)」『創価経済論集』第21巻2号, 1992.3
- 「ファジィニューラルネットワークによる反応関数の同定」『創価経済論集』第22巻1号, 1992.12
- 「ファジィによるクライン戦間期モデルの制御(III)：遺伝的アルゴリズムによるファジィ制御ルールの構成」『創価経済論集』第23巻1号, 1993.7
- 「ファジィ制御による価格の安定化」『創価経済論集』第23巻2号, 1993.9
- 「遺伝的アルゴリズムによるポートフォリオ選択問題の一解法」『創価経済論集』第23巻3号, 1993.12
- 「ファジィによるクライン戦間期モデルの制御(IV)：遺伝的アルゴリズムによるファジィ制御ルールの自動生成」『創価経済論集』第23巻4号, 1994.3
- 「質的選択行動のニューラルネットワークモデルによる分析」『創価経済論集』第24巻2号, 1994.9
- 「遺伝的アルゴリズムによる株式ポートフォリオの構成」『創価経済論集』第24巻3号, 1995.1
- 「遺伝的アルゴリズムによるポートフォリオ選択問題の一解法」『証券経済学会年報』第30巻, 1995.5
- 「ファジィ理論による言語的政策ルールの分析」『創価経済論集』第24巻4号, 1995.12

- 「遺伝的アルゴリズムによるポートフォリオ選択問題の解法」『創価経済論集』第25巻1.2.3.4号, 1996.11
- 「中央銀行の政策ルールについて」『創価経済論集』第26巻1.2号, 1996.12
- 「日本のフィリップス・カーブはシフトしたか」『経済セミナー』第507号, 1997.4
- 「階層型ニューラルネットワークによる公定歩合政策の分析」『創価経済論集』第26巻3.4号, 1997.6
- 「ニューラルネットワークによるクライン=ゴールドバーガー・モデルの制御」『創価経済論集』第27巻3.4号, 1998.7
- 「経済の「不快」と「不満」」『経済セミナー』第526号, 1998.11
- 「遺伝的アルゴリズムによるファジィ制御規制の自動生成」『創価経済論集』第28巻1号, 1999.3
- 「階層型ニューラルネットワークによるクラインモデルの安定化制御」『創価経済論集』第28巻2.3.4号, 1999.12
- 「ファジィ推論による食肉需要分析」『創価経済論集』第29巻1.2号, 2000.3
- 「財政赤字のマクロ経済分析」『創価経済論集』第29巻3.4号, 2000.3
- 「Construction of Variable Coefficients Input-Output Model」『創価経済論集』第30巻1号, 2000.9
- 「可変係数産業連関モデルの研究(その1)」『創価経済論集』第30巻2.3.4号, 2001.3
- 「産業連関モデルによる産業構造変化の分析」『創価経済論集』第31巻1.2.3.4号, 2002.3
- 「実数値GAによる計量経済モデルの制御実験」『創価経済論集』第31巻1.2.3.4号, 2002.3
- 「政府債務の中立性と持続可能性」『創価経済論集』第32巻1.2.3.4号, 2003.3
- 「プロジェクトン法による最適成長モデルの数値解 —計算経済学の研究(その1)」『創価経済論集』第34巻1.2号, 2004.12
- 「摂動法による最適成長モデルの数値解 —計算経済学の研究(その2)」『創価経済論集』第34巻1.2号, 2004.12
- 「動的計画法の数値解析 —計算経済学の研究(その3)」『創価経済論集』第35巻1.2.3.4号, 2005.12
- 「資産価格モデルの数値解析 —計算経済学の研究(その4)」『創価経済論集』第35巻1.2.3.4号, 2005.12
- 「二次近似による政策関数の導出 —計算経済学の研究(その5)」『創価経済論集』第37巻1.2.3.4号, 2008.3
- 「RBCモデルによる景気循環の実証分析 —計算経済学の研究(その6)」『創価経済論集』第38巻2.3.4号, 2009.3
- 「PEA法によるDGEモデルの数値解析 —計算経済学の研究(その7)」『創価経済論集』第43巻1.2.3.4号, 2014.3

- 「不完備市場モデルの数値解法 —計算経済学の研究(その8)」『創価経済論集』第43巻1.2.3.4号, 2014.3
- 「変分問題の数値解法 —計算経済学の研究(その9)」『創価経済論集』第44巻1.2.3.4号, 2015.3
- 「大型線形方程式の数値解法 —計算経済学の研究(その10)」『創価経済論集』第45巻1.2.3.4号, 2016.3
- 「確率微分方程式の数値解法 —計算経済学の研究(その11)」『創価経済論集』第45巻1.2.3.4号, 2016.3
- 「動学的調整過程の数値解法 —計算経済学の研究(その12)」『創価経済論集』第46巻1.2.3.4号, 2017.3
- 「人口分布の数量分析 —計算経済学の研究(その13)」『創価経済論集』第46巻1.2.3.4号, 2017.3
- 「枯渇性資源の採掘問題 —計算経済学の研究(その14)」『創価経済論集』第47巻1.2.3.4号, 2018.3
- 「最適成長モデルの数値解析 —計算経済学の研究(その15)」『創価経済論集』第47巻1.2.3.4号, 2018.3
- 「資産格差の数値解析 —計算経済学の研究(その16)」『創価経済論集』第48巻1.2.3.4号, 2019.3
- 「異質的企業の投資理論 —計算経済学の研究(その17)」『創価経済論集』第48巻1.2.3.4号, 2019.3
- 「世代重複モデルの数値解析 —計算経済学の研究(その18)」『創価経済論集』第49巻1.2.3.4号, 2020.3

# 世代重複モデルの数値解析 (計算経済学の研究その18)

## Numerical Analysis of the Overlapping Generations Models

釜 国男<sup>\*</sup>  
Kunio KAMA

これまで無限期間の異質的主体モデルについて検討してきたが、ここでは年齢というもう一つの異質性について考える。従来のモデルは無限の寿命を仮定しているが、実際には人の寿命は有限であり、任意の時点で若年層から老年層まで多くの世代が重複している。メンバーは年とともに変化するが、世代の特徴や行動は短期的には変わらない。世代重複モデル (Overlapping-Generations Model; OLG) はこのような現実を考慮したモデルである。モデルを最初に考案したサムエルソン (1958) は、2 世代を仮定して不換紙幣の経済的役割について論じた。またダイアモンド (1965) は経済成長と公債の関係を分析している。さらにバロー (1974) は、一定の条件下でリカードの等価定理が成り立つことを指摘した。一般に世代重複モデルでは競争均衡はパレート最適ではない。このため社会計画問題に置きかえて均衡解を求めることはできない。また均衡の一意性も保証されない。さらに資本が過剰に蓄積されることも知られている。モデルは財政問題にも応用されている。アウアバック = コトリコフ (1987) は多数世代のモデルを構築して世代会計を提唱した。ソローやラムゼイモデルと並ぶ重要なモデルでありながら、これまで OLG モデルの数値解析はほとんど行われていない。構造が複雑で数値計算が難しいことが主な理由とみられる。離散時間にすれば少数の世代しか扱えない。しかしここで示すように、連続時間にすれば数百世代でも計算は可能である。しかも既存のコンピュータ・プログラムを一部修正するだけで済む。最初に所得が外生的に与えられるケースを取り上げる。つぎに家計と企業と政府からなる経済に拡張する。最後に労働供給を内生化する。

### 1. モデルの構造

連続時間の世代重複モデルについて考える<sup>1)</sup>。各世代の人口は一定で、全人口は 1 に基準化する。消費者の寿命は  $T$  年で、ある年における年齢を  $t$ 、保有資産を  $a_t$ 、消費を  $c_t$  で表す。所得  $y_t$  は外生的に与えられている。第 0 世代は親世代から遺産を相続する。はじめに定常状態における消費者の行動を分析しよう。消費者は予算制約のもとで生涯の期待効用を最大化する。

---

<sup>\*</sup> 創価大学名誉教授

$$\max_{\{c_t\} \geq 0} E_0 \left[ \int_0^T e^{-\rho t} u(c_t) dt + e^{-\rho T} \phi(a_T) \right] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & da_t = (y_t + ra_t - c_t) dt \\ & dy_t = \mu(y_t) dt + \sigma(y_t) dW_t, \quad u_t \in [y_1, y_2] \\ & a_t \geq 0, \phi(a_T) \geq 0 \end{aligned}$$

ここで  $\phi(a_T)$  は遺産の効用を表し、 $\rho \geq 0$  は主観的割引率である。動的計画法を適用すると、ベルマン方程式は

$$\rho V(a, y, t) = \max_c \left\{ u(c) + V_a(a, y, t)(y + ra - c) + V_y(a, y, t)(\theta(\mu - y)) + \frac{\sigma^2}{2} V_{yy}(a, y, t) + V_t(a, y, t) \right\} \quad (2)$$

となる。 $V(a, y, t)$  は  $t$  歳のときの value function である。消費の最適条件は

$$u'(c) = V_a(a, y, t) \quad (3)$$

である。消費は資産と所得の関数であり、 $c(a, y, t)$  とする。貯蓄は

$$s(a, y, t) = y + ra - c(a, y, t)$$

で与えられる。ただし、 $t = T$  では

$$V(a, y, T) = \phi(a_T) \quad (4)$$

となる。 $a \geq 0$  によりつぎの条件を満たす必要がある。

$$V_a(0, y, t) \geq u_c(y) \quad (5)$$

また計算の都合上、 $a \leq \bar{a}$  とする。このため

$$V_a(\bar{a}, y, t) \leq u_c(y + r\bar{a}) \quad (7)$$

という条件を課す。さらに所得の上限と下限では

$$\partial_y V(a, y_1, t) = 0 \quad (8)$$

$$\partial_y V(a, y_2, t) = 0$$

とする。

所得はつぎの算術ブラウン運動にしたがう<sup>2)</sup>。

$$dy_t = -\theta(y_t - \mu)dt + \sigma dW_t \quad (9)$$

$\theta > 0$  であり、所得は平均  $\mu$  に回帰する性質がある。定常状態における所得と資産の分布を  $g(a, y, t)$  と表す。 $g(a, y, t)$  はつぎのコルモゴロフ方程式を満たす。

$$g_t(a, y, t) = -\partial_a(s(a, y, t) g(a, y, t)) - \partial_y(\theta(\mu - y) g(a, y, t)) + \frac{\sigma^2}{2} g_{yy}(a, y, t) \quad (10)$$

さらに規格化条件

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_0^\infty g(a, y, t) da dy = 1 \quad (11)$$

も満たさなければならない。第  $T$  世代は資産を残すので

$$g(a, y, 0) = g(a, y, T)$$

が成り立つ。つまり第 0 世代と第  $T$  世代の状態変数の分布は等しくなる。

競争均衡を解析的な方法で求めることは難しい。このため数値計算によって近似解を求めた。いくつかの方法があるが、ここでは Achdou 他 (2017) のプログラムを利用できる差分法を用いることにした。最初に資産と所得を  $a_i, i = 1, \dots, I$  と  $y_j, j = 1, \dots, J$  で離散化し、年齢を  $t_n, n = 1, \dots, N$  で近似する。  $V_{i,j}^n = V(a_i, y_j, t_n)$  において、(2) の HJB 方程式を

$$\rho V_{i,j}^n = u(c_{i,j}^{n+1}) + (V_{i,j}^n)'[y_j + r a_i - c_{i,j}^n] + \theta(\mu - y_j)(V_{i,j}^n)' + \frac{\sigma^2}{2}(V_{i,j}^n)'' + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t}$$

で近似する。この式は行列を用いて

$$\rho V^n = u^{n+1} + A^{n+1} V^n + \frac{1}{\Delta t}(V^{n+1} - V^n) \quad (12)$$

と表される。右辺の  $A^{n+1}$  は離散化した  $(a_i, y_j)$  の推移行列である。これは 1 階の差分方程式であり、(4) を初期条件として時間を逆向きにして解く。 $t_n$  世代の資産と所得の分布を  $g_{ij}^n = g(a_i, y_j, t_n)$  で近似する。すると (10) から

$$\frac{g^{n+1} - g^n}{\Delta t} = (A^n)^T g^{n+1}$$

が成り立つ。これより

$$g^{n+1} = (I - \Delta t (A^n)^T)^{-1} g^n \quad (13)$$

となる。こんどは時間を正の方向に進めて  $g_{ij}^n$  を求める。ただし初期値を  $g_{ij}^0 = g(a_i, y_j, 0)$  とする。相続資産は同じではなく、初めから格差が存在する。しかし貯蓄を通じて格差はしだいに縮小する。第  $t$  世代の資産は

$$A(t) = \frac{1}{T} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\infty a g(a, y, t) da dy$$

で与えられる。利子率は貯蓄を通じて  $g(a, y, t)$  を変化させる。このため  $A(t)$  は利子率の関数となり、総資産

$$S(r) = \int_0^T A(t) dt$$

も利子率に依存する。これは

$$S(r) = \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\infty q(a, y) da dy$$

$$q(a, y) = \frac{1}{T} \int_0^T g(a, y, t) dt$$

と表すこともできる。 $q(a, y)$  は全世代の資産と所得を合計したものである。 $S(r)$  は利子率の増加関数であり、利子率が高くなると貯蓄は増加する。資産に対する（海外からの）需要を  $D$  とすると、資産市場の均衡条件は

$$S(r) = D \quad (14)$$



と表される。競争均衡は (2), (10), (14) 式を満たす  $V(a, y, t)$ ,  $g(a, y, t)$ ,  $r$  によって定義される。数値計算によってこれらの関数と利子率を求める。

計算にあたってつぎの関数を用いた。

$$u(c) = -\frac{1}{c}$$

$$\phi(a) = 0.3 \log(0.001 + a)$$

係数の 0.3 は遺産動機の強さを表すパラメータである。

つぎのステップを実行して数値解を求めた。

[ステップ 1]  $r = r^0$  と第 0 世代の資産と所得の分布を設定する。

[ステップ 2] (11) と (12) 式から  $V_{ij}^n$  と  $g_{ij}^n$  を求める。

[ステップ 3] 総貯蓄

$$S^{new} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_i g_{i,j}^n \Delta t \Delta a \Delta y$$

を求めて  $|S^{new} - D| \leq \varepsilon$  であれば終了する。そうでなければ 2 分法にしたがつて  $r$  を更新し、同時に第 0 世代の資産と所得の分布を調整してステップ 2 へ戻る。

うまく初期値を選ぶと少数回反復しただけで収束し、世代数を増やしても計算時間はあまり変わらない。

## 2. 計算結果

モデルのパラメータを  $T = 80$ ,  $\rho = 0.05$ ,  $\theta = 0.8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0.2$  とした。所得と資産を  $0.5 \leq y \leq 1.5$ ,  $0 \leq a \leq 10$  の区間にとり、 $I = 100$ ,  $J = 30$  の分点で近似する。資産に対する需要は  $D = 1$  とする。 $\Delta t = 0.5$  として 160 世代が重複している。前節のアルゴリズムを実行した結果、均衡利子率は  $r^* = 4.67\%$  となる。貯蓄が過剰に行われて利子率は割引率より低くなる。図 1 は  $t = 1, 45, 60$  について、最高所得者の消費と貯蓄関数を示している。いずれのケースでも消費は資産とともに増加し、資産が同じであれば年齢が高いほど多く消費する。ほかの年齢と所得層でも同じような結果が得られる<sup>3)</sup>。しかし日本のデータによると、家計の消費支出は 50 歳台をピークとして減少する。おそらくここで考慮していない要因が働いているためであろう。図 2 は資産のプロファイルである。消費（貯蓄）のパターンを反映して、資産は 50 歳前後でピークに達する。資産のジニ係数は年齢とともに低下して、50 歳で 0.73 となる。もっと上の世代では資産格差は急激に拡大する。50 歳台では多くの資産を保有するだけでなく格差も小さい。パラメータの値を変えると均衡利子率は変化する。とくに割引率の影響が大きい。例えば  $\rho = 0.08$  とすると、 $r^* = 7.58\%$  となる。これは貯蓄意欲が低下して資産の供給が減少するからである。何らかの理由で資産の需要が増加した場合も利子率は高くなる。

これまで所得は外生的に与えられると仮定してきた。次節では所得が内生的に決まるようにモデルを拡張する。



図 1 消費関数と貯蓄関数

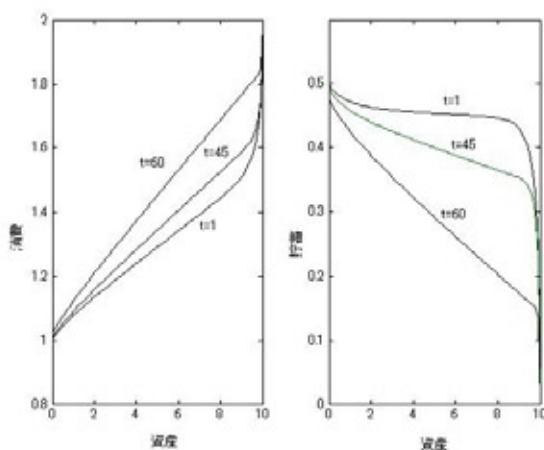
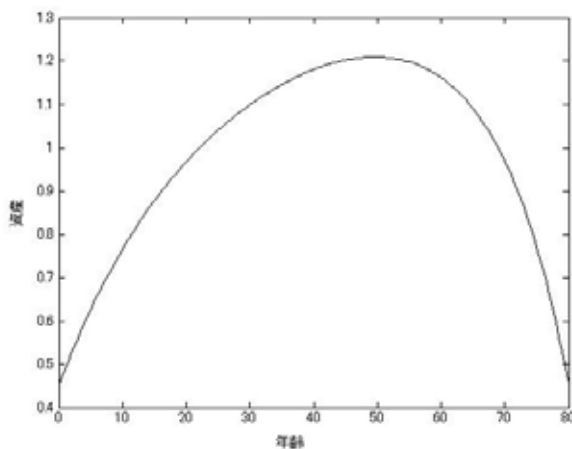


図 2 資産のプロファイル



### 3. 生産活動を含む場合

ここでは所得が内生的に決まる場合を検討する。代表的企業は資本と労働を用いて財やサービスを生産し、労働者は 60 歳で退職して年金を受け取る。現役世代は 1 単位の労働を供給して政府に税金を納める。労働生産性  $z_t$  はつぎの確率過程にしたがうものとする。

$$dz_t = -\theta(z_t - \mu)dt + \sigma dW_t, \quad z_t \in [z_1, z_2]$$

現役世代の予算制約は

$$da_t = ((1 - \tau)w_t z_t + r_t a_t - c_t)dt \quad (15)$$

と表される。 $\tau$ は税率で $w_t$ は実質賃金である。退職したあとは

$$da_t = (r_t a_t + b - c_t) dt$$

となる。 $b$ は現役時の賃金と無関係に支給される年金である。政府は労働所得に課税して年金の財源とする。 $b = 3\tau w$ とすれば税収と支出は等しくなる。税率を $\tau = 0.2$ に固定し、賃金の変動に合わせて年金を調整するシステムを想定する。代表的企業は利潤

$$\Pi = F(K, L) - wL - (r + \delta)K$$

最大となるように資本と労働を調整する。利潤最大の条件は

$$w = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$$

$$r = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} - \delta$$

である。生産関数を

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

とすると

$$w = A(1 - \alpha)K^\alpha L^{-\alpha}$$

$$r = A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta$$
(16)

となる。60歳になると退職するので $L = 2/3$ である。

資本市場の均衡条件は

$$K = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_i}^{z_{i+1}} \int_0^\infty ag(a, z, t) da dz dt$$
(17)

と表される。定常状態では資産と生産性の分布は変わらない。このため総資産と賃金、利子率は一定となる。以下の手順でモデルの数値解を求めた。

[ステップ1] 第0世代の資産と生産性の分布、および総資産と賃金、利子率の初期値を設定する。

[ステップ2] 現役世代と退役世代について $V_{ij}^n$ と $g_{ij}^n$ を求める。

[ステップ3] 総資本

$$K^{new} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_i g_{i,j}^n \Delta t \Delta a \Delta z$$

を計算する。 $|K^{new} - K^{old}| \leq \varepsilon$ であれば終了し、そうでなければ

$$K^1 = \omega K^{old} + (1 - \omega) K^{new}$$

に調整する。(16)式から賃金と利子率を計算し、第0世代の資産と所得の分布を調整してステップ2へ戻る。

パラメータの値は前節と変わらない。ただし $\alpha = 0.3$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\tau = 0.2$ とする。上のアルゴリズムを実行すると $K^* = 1.9559$ ,  $w^* = 0.9379$ ,  $r^* = 5.16\%$ ,  $b = 0.5270$ となる。手取り賃金の7割に相当する年金が支給される。図3は年齢別の消費を示している。消費は年齢とともに増加し、退職を

機に若干レベルアップする。退職すると所得は減少するが、同時に貯蓄も減少するからである。貯蓄は 60 歳になるまでプラスで、それ以降はマイナスとなる。図 4 は全世代の資産分布を示している。資産は右側に裾の長い単峯型の分布をしている。ジニ係数は 0.62 で若干格差が存在する。世代別にみると、現役世代は 0.65 で退役世代は 0.57 となる。これは退職すると所得格差が縮小するからである。格差をもたらすもうひとつの要因は全要素生産性である。全要素生産性を  $A = 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$  とすると、ジニ係数は 0.62, 0.51, 0.40, 0.29, 0.20, 0.14 と低くなる。したがって全要素生産性が上昇すれば資産格差は小さくなる。逆に生産性が低下すれば格差は拡大する。第三の要因は親の遺産である。遺産の効用関数

$$\phi(a) = \eta \log(0.001 + a)$$

の係数  $\eta$  が大きくなると遺産は増える。遺産の影響を見るために、 $\eta = 0.001, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  としてジニ係数を求めると、係数は 0.60, 0.61, 0.61, 0.61, 0.62, 0.62 となる。 $\eta = 0.3$  のとき平均資産の 22.3% にあたる遺産を相続するが、これはそれほど高い割合ではない。したがって遺産の分配効果は限定的である。

図 3 消費のプロファイル

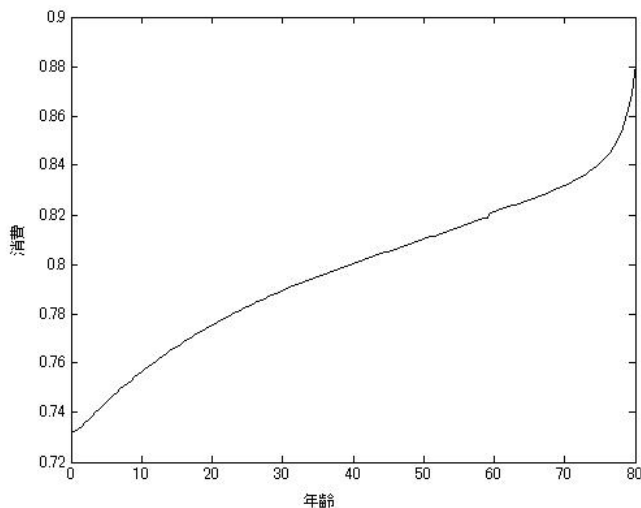
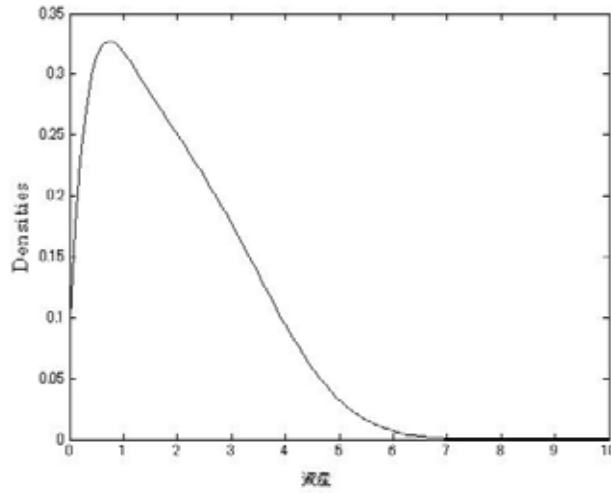


図4 資産の分布



#### 4. 労働供給を内生化した場合

つぎに労働供給を内生化した場合について考える。消費者は生涯の期待効用

$$E_0 \left[ \int_0^T e^{-\rho t} u(c_t, l_t) dt + e^{-\rho T} \phi(a_T) \right] \quad (18)$$

を最大化する。ここで  $l_t$  は労働供給を表し、予算制約は

$$\begin{aligned} \text{現役世代: } da_t &= ((1-\tau)wz_t l_t + ra_t - c_t) dt \\ \text{退役世代: } da_t &= (r_t a_t + b - c_t) dt \end{aligned} \quad (19)$$

となる。労働生産性  $z_t$  はつぎの確率過程にしたがう。

$$dz_t = -\theta(z_t - \mu)dt + \sigma dW_t, \quad z_t \in [z_1, z_2]$$

数値計算では効用関数を

$$u(c, l) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{2}l^2$$

$$\phi(a) = 0.3 \log(0.01 + a)$$

とした。この場合、 $HJB$  方程式とコルモゴロフ方程式は

$$\begin{aligned} \rho V(a, z, t) &= \max_{c, l} \left\{ u(c, l) + V_a(a, z, t)((1-\tau)wz l + ra - c) + V_z(a, z, t)(\theta(\mu - z)) + \frac{\sigma^2}{2} V_{zz}(a, z, t) + V_t(a, z, t) \right\} \\ g_t(a, z, t) &= -\partial_a(s(a, z, t)g(a, z, t)) - \partial_z(\theta(\mu - z)g(a, z, t)) + \frac{\sigma^2}{2} g_{zz}(a, z, t) \end{aligned} \quad (20)$$

となる。消費と労働供給の最適条件は

$$u_c(c, l) = V_a(a, z, t)$$

$$-u_l(c, l) = (1 - \tau)wzV_a(a, z, t) \quad (21)$$

であり

$$c = V_a(a, z, t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$l = (1 - \tau)wzV_a(a, z, t)$$

となる。これらの式から  $V_a$  を消去すると

$$lc^2 = (1 - \tau)wz$$

が成り立つ。 $s = 0$  であれば、 $c = (1 - \tau)wzl + ra$  より

$$l((1 - \tau)wzl + ra)^2 = (1 - \tau)wz$$

となる。この式から労働供給を求めることができる<sup>5)</sup>。最適労働供給は資産と生産性の関数であり、 $\partial l / \partial a < 0$  となる。生産要素市場では次式が成り立つ。

$$w = A(1 - \alpha) K^\alpha L^{-\alpha}$$

$$r = A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta$$

市場均衡では (17) に加えて

$$L = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_1}^{z_2} \int_0^\infty l(a, z, t) g(a, z, t) da dz dt \quad (22)$$

も成り立つ。さらに規格化条件

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^\infty g(a, z, t) da dz = 1$$

を満たす必要がある。

数値計算を行った結果、資産のプロファイルは図 5 のようになる。実線は全要素生産性が  $A = 1$  の場合で、破線は  $A = 1.2$  の場合である。一般にライフサイクルモデルでは資産は退職するまで増加してその後は減少するが、この場合も同じパターンにしたがう。生産性が高くなると曲線は上にシフトする。このため総資産は 3.447 から 4.053 に増加する。図 6 は労働供給を示している。生産性が低いとき、労働供給は第 0 世代の 1.1203 から最終世代の 0.884 に減少し、生産性が高くなると 1.031 から 0.790 に減少する。労働需要は増加するが、資産の増加で労働供給が減少するからである。計算結果を要約すると、全要素生産性が上昇すると資本は増加して労働供給は減少する。総生産は 1.181 から 1.399 に増加し、利子率は 5.23% から 5.36% に上昇する。総効用を

$$U = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_1}^{z_2} \int_0^\infty u(a, z, t) g(a, z, t) da dz dt$$

と定義しよう。生産性の上昇により、総効用は  $U = -1.382$  から  $-1.152$  に改善する。同時に資産格差も縮小して、ジニ係数は 0.38 から 0.30 に低下する。このように全要素生産性は総生産と資産の分布に強い影響を与える。税率の影響も無視できない。税率を  $\tau = 0.2$  から  $\tau = 0.1$  に引き下げると、労働供給は 0.758 に増加し、資本は 3.862 に拡大する。このため総生産は 1.235 となり、総効用は  $U = -1.362$  と高くなる。したがって減税により経済パフォーマンスは改善する。

図5 資産のプロファイル

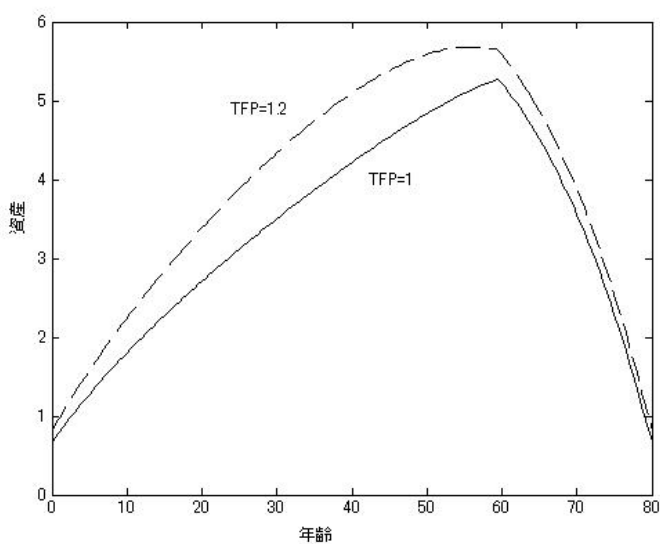
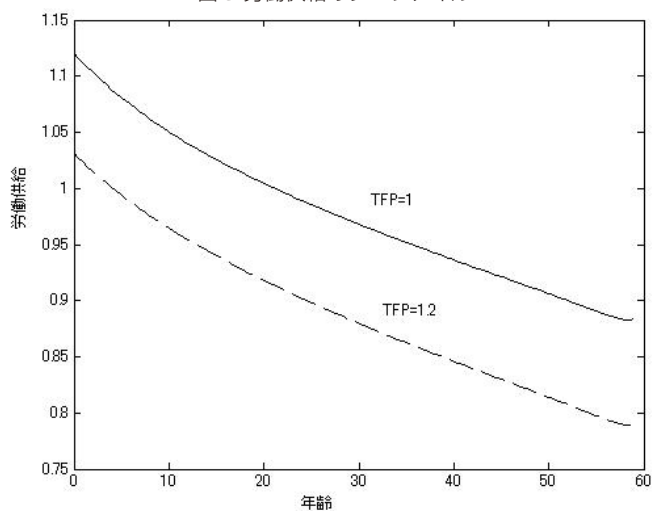


図6 労働供給のプロファイル



## 5. 結語

ミクロ的基礎をもつマクロモデルはラムゼイ型の無限期間モデルと世代重複モデルに大別される。どちらも解析的な方法で解を求めることは難しい。このため差分法を用いた数値解法が考案されている。しかし、これまでラムゼイモデルにしか適用されていない。世代重複モデルは構造が複雑で数値計算は難しいとみられていたからである。しかし連続時間にすれば計算はそれほど難しくない。

いくつかの計算結果を示したが、まだ解決すべき課題が残っている。一つはモデルの安定性に関する問題である。モデルが動学的に不安定であれば経済政策の効果を議論しても意味がない。離散時間のモデルと同様に、連続時間のモデルでも動学的安定性を調べる必要がある。もう一つの課題は集計的リスクを考慮することである。固有リスクは格差問題の議論に欠かせないが、景気変動を論じるには集計的リスクを考慮する必要がある。そのようなモデルでは分布関数は状態変数となり既存の方法は使えない。

## 注

- 1) 世代重複モデルの数値計算については、Heer and Maussner(2005) の第7章が詳しい。Rios-Rull(1999) は多くの点で参考になった。
- 2) ほかの確率過程を仮定しても計算結果はほとんど変わらない。
- 3) 遺産動機が非常に強いときは年齢が高くなるほど消費は減少する。
- 4) 詳細は釜 (2018) の第11章を参照せよ。
- 5) 方程式の根は Matlab の `fzero` 関数で求めた。

## 参考文献

- 釜国男 (2018) 『コンピュータショナル・エコノミクス』 多賀出版。
- Achdou, Yves, J. Han, J. Lasry, P. Lions, B. Moll (2017) “Income and Wealth Distribution in Macroeconomics: A Continuous-Time Approach”, *NBER Working Paper*, No.23732.
- Auerbach, A. J. and L. J. Kotlikoff (1987) *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press.
- Barro, Robert (1974) “Are Government Bonds Net Wealth?”, *Journal of Political Economy*, Vol.82, 1095-1117.
- Diamond, Peter (1965) “National Debt in a Neoclassical Growth Model”, *American Economic Review*, Vol.55, 1126-1150.
- Heer, B. and A. Maussner (2005) *Dynamic General Equilibrium Modelling*, Springer.
- Rios-Rull, J. V. (1999) “Computation of Equilibria in Heterogenous-Agent Models”, In Marimon and Scott(eds), *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Oxford University Press.
- Samuelson, P. A. (1958) “An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money”, *Journal of Political Economy*, Vol.66, 467-482.





# ポントリヤーギンの最大値原理<sup>1</sup>

## Pontryagin-Type Maximum Principle

板垣 有記輔<sup>2</sup>  
Yukio ITAGAKI

連続時間ファイナンス理論 *Continuous-Time Finance Theory* と呼ばれる研究分野の形成と飛躍的進展に最大の貢献をした Merton, R. C. は、不確実性の下での連続時間モデルの確率解析学について次のように述べている。「連続時間のファイナンスモデルの数学には、確率論と最適化理論の美しい応用が含まれている。しかし、科学の中で美しいものがすべて実用的であるとは限らないことは言うまでもない。そしてまた、科学の中で実用的であるものがすべて美しいというわけでもない。だが、ここには、その美しさと実用性の双方が含まれている。」(Merton, R. C. [21] *Continuous-Time Finance* のはしがき)

本稿で、ベルマンの動的計画法の最適性原理<sup>3</sup>を用いて、連続時間で確定的な最適制御と連続時間で確率的な最適制御についてのそれぞれのポントリヤーギン・タイプの最大値原理を導出する。

### I 連続時間で確定的な最適制御のポントリヤーギンの最大値原理

固定始点（固定左端点）・自由終点（自由右端点）・固定計画期間をもつ連続時間で自律的・確定的なボルツァ型の最適制御問題

$$\max_{(u(t))_0^T} \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + B(x(T))$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

1 ペンシルバニア大学で博士（経済学）の学位を取得後、創価大学経済学部にもacro経済学担当の専任講師として赴任され、それ以来の同僚で学問上の話し相手であり、現代macro経済学および計算経済学を一貫して研究され続けておられる釜 国男氏に本稿を捧げる。

2 創価大学名誉教授（2015年3月18日）、経済学博士（東北大学、1986年7月17日）、元創価大学経済学部教授（「ミクロ経済学上級」、「金融論」、「ファイナンス理論」および「経済数学 解析」担当）

3 最適政策は、最初の状態および最初の決定が何であっても、残りの決定列は最初の決定から生じた状態に関して最適政策を構成するという性質をもつ。あるいは、最適経路のすべての部分経路はまた最適であるという性質を持つ。この性質をベルマンの動的計画法の最適性原理 *Bellman's Principle of Optimality of Dynamic Programming* という。R. ベルマン [2] 『ダイナミック・プログラミング』東京図書、1973年を参照。

$$x(0) = x^0 : \text{given}$$

$$x(T) : \text{free}$$

$$T : \text{given}$$

を考える。

目的汎関数  $\int_0^T f^0(x(t), u(t))dt + B(x(T))$  を最大にする制御  $(u^*(t))_0^T$  を最適制御、それに対応する状態の時間経路を最適経路  $(x^*(t))_0^T$  といい、最適制御と最適経路の対を、最適制御問題の最適解  $\{u^*(t), x^*(t) : t \in [0, T], u \in U\}$ <sup>4</sup> という。

任意の時点  $t \in [0, T]$  の点  $x(t) = x^t$  を初期状態とする最適制御問題の値関数 value function を

$$J(x(t), t) := \max_{(u(\tau))_t^T} \left\{ \int_t^T f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau + B(x(T)) \right\}$$

$$\text{subject to } \dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau)),$$

$$x(t) = x^t : \text{given},$$

$$x(T) : \text{free}$$

$$T : \text{given}$$

と定義する。

$$J(x(t), t) = \max_{(u(\tau))_t^T} \left\{ \int_t^T f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau + B(x(T)) \right\}$$

計画期間  $[t, T]$  を2つの部分計画期間  $[t, t+dt]$ ,  $[t+dt, T]$  に分けて表せば、

$$= \max_{(u(\tau))_t^T} \left\{ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau + \int_{t+dt}^T f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau + B(x(T)) \right\}$$

最適性の原理（最適経路のすべての部分経路はまた最適である）により、十分小さい  $dt > 0$  に対して、

$$\begin{aligned} &= \max_{(u(\tau))_t^{t+dt}} \left\{ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau + \max_{(u(\tau))_{t+dt}^T} \left\{ \int_{t+dt}^T f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau + B(x(T)) \right\} \right\} \\ &= \max_{(u(\tau))_t^{t+dt}} \left\{ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau + J(x(t+dt), t+dt) \right\} \\ &= \max_{(u(\tau))_t^{t+dt}} \left\{ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau))d\tau + J(x(t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial x_i} \dot{x}_i(t)dt + \frac{\partial J}{\partial t} dt + o(dt) \right\} \end{aligned}$$

両辺から  $J(x(t), t)$  を引き、両辺を  $dt > 0$  で割り、 $dt \rightarrow 0$  とすれば、

---

4  $U$  : 許容されるすべての制御の集合

$$0 = \max_{u(t) \in U} \left[ f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i + \frac{\partial J}{\partial t} \right]$$

これを、ハミルトン・ヤコビ・ベルマンの偏微分方程式 *Hamilton · Jacobi · Bellman Partial differential equation* あるいは単にベルマン方程式 *Bellman equation* という。

$J(x(t), t)$  の  $T$  における境界条件は、

$$J(x(T), T) = \max_{(u(\tau))_T^T} \left\{ \int_T^T f^0(x(\tau), u(\tau)) d\tau + B(x(T)) \right\} = B(x(T)).$$

**定理 1** 固定始点（固定左端点）・自由終点（自由右端点）・固定計画区間をもつ連続時間で自律的・確定的なボルツア型の最適制御問題

$$\max_{(u(t))_0^T} \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + B(x(T))$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$x(0) = x^0 : \text{given},$$

$$x(T) : \text{free}$$

$$T : \text{given}$$

の最適制御  $(u^*(t))_0^T$  は、最大値条件

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], f^0(x(t), u^*(t)) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial J}{\partial x_i} \right) f^i(x(t), u^*(t)) + \frac{\partial J}{\partial t} \\ = \max_{u(t) \in U} \left[ f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial J}{\partial x_i} \right) f^i(x(t), u(t)) + \frac{\partial J}{\partial t} \right] \\ = 0 \end{aligned}$$

を満足しなければならない<sup>5</sup>。

**定理 2**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$x(0) = x^0 : \text{given},$$

$$x(T) : \text{free}$$

$$T : \text{given}$$

を満たす任意の解を  $\{x(t), u(t) : t \in [0, T], u \in U\}$  とする。

---

<sup>5</sup> 最大値条件は、最適解（最適経路と最適制御の組）であるための必要条件である。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$x(0) = x^0 : \text{given},$$

$$x(T) : \text{free}$$

$$T : \text{given}$$

およびハミルトン・ヤコビ・ベルマンの偏微分方程式

$$0 = \max_{u(t) \in U} \left[ f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i + \frac{\partial J}{\partial t} \right]$$

と  $J(x(t), t)$  の  $T$  における境界条件

$$J(x(T), T) = B(x(T))$$

を満たす解を  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^* \in U\}$  とする。ここに、

$$\begin{aligned} u^*(t) &:= \arg \max_{u(t) \in U} \left[ f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i + \frac{\partial J}{\partial t} \right] \\ &= \bigcap_{v(t) \in U} \left\{ u(t) \in U \left| \begin{aligned} &f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i + \frac{\partial J}{\partial t} \\ &\geq f^0(x(t), v(t)) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i + \frac{\partial J}{\partial t} \end{aligned} \right. \right\} \end{aligned}$$

である。

この  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^* \in U\}$  は、固定始点（固定左端点）・自由終点（自由右端点）・固定計画区間をもつ連続時間で自律的・確定的なボルツァ型の最適制御問題

$$\max_{(u(t))_0^T} \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + B(x(T))$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$x(0) = x^0 : \text{given},$$

$$x(T) : \text{free}$$

$$T : \text{given}$$

の最適解（最適経路と最適制御の組）である<sup>6</sup>。

証明  $\{x(t), u(t) : t \in [0, T], u \in U\}$  と  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^* \in U\}$  とに対して

---

<sup>6</sup> 最大値条件は、最適解（最適経路と最適制御の組）であるための十分条件である。

$$\begin{aligned}
0 &= f^0(x^*(t), u^*(t)) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial J}{\partial t}(x^*(t), t) \\
&\geq f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i(x(t), u(t)) + \frac{\partial J}{\partial t}(x(t), t) . \\
\frac{dJ(x(t), t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial t} \frac{dt}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial x_i} f^i(x(t), u(t)) + \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{1}$$

であるから、

$$J(x(T), T) - J(x(0), 0) = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial x_i} \right) f^i(x(t), u(t)) + \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial t} \right\} dt \tag{2}$$

同様に

$$J(x^*(T), T) - J(x^*(0), 0) = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial J(x^*(t), t)}{\partial x_i} \right) f^i(x^*(t), u(t)) + \frac{\partial J(x^*(t), t)}{\partial t} \right\} dt \tag{3}$$

$\{x(t), u(t) : t \in [0, T], u \in U\}$  と  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^* \in U\}$  はいずれも

$$x(0) = x^0 : \text{given}$$

を満たすので

$$x(0) = x^*(0) = x^0 : \text{given}$$

であり

$$J(x(0), 0) = J(x^*(0), 0) \tag{4}$$

不等式 (1) の両辺を、 $[0, T]$  の上で積分すれば、

$$\begin{aligned}
&\int_0^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt + \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial J}{\partial t}(x^*(t), t) \right\} dt \\
&\geq \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i(x(t), u(t)) + \frac{\partial J}{\partial t}(x(t), t) \right\} dt . \tag{5}
\end{aligned}$$

(2), (3), (5) より

$$\begin{aligned}
&\int_0^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt + J(x^*(T), T) - J(x^*(0), 0) \\
&\geq \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + J(x(T), T) - J(x(0), 0) .
\end{aligned}$$

これと (4) より

$$\begin{aligned}
& \int_0^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt + J(x^*(T), T) \\
& \geq \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + J(x(T), T) .
\end{aligned} \tag{6}$$

$\{x(t), u(t) : t \in [0, T], u \in U\}$  と  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^* \in U\}$  はいずれも境界条件を満たすから

$$J(x(T), T) = B(x(T)), J(x^*(T), T) = B(x^*(T)) . \tag{7}$$

(6), (7) から、

$$\begin{aligned}
& \int_0^T f^0(x^*(t), u^*(t)) dt + B(x^*(T)) \\
& \geq \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + B(x(T)) .
\end{aligned}$$

証了

次に、ハミルトン・ヤコビ・ベルマンの偏微分方程式を利用して連続時間で確定的な最適制御のポントリヤギンの最大値原理 *Pontryagin-Type Deterministic Maximum Principle in Continuous-Time* を導出する。いま、随伴ベクトル  $p(t) \in R^n$  を

$$p(t) := \left( \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial x_1}, \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial x_n} \right) \tag{8}$$

と定義し、ハミルトン関数  $H(x(t), p(t), u(t))$  を

$$H(x(t), p(t), u(t)) := f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f^i(x(t), u(t))$$

と定義すれば、ハミルトン・ヤコビ・ベルマンの偏微分方程式より

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial J}{\partial t} &= \max_{u(t) \in U} \left[ f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial J}{\partial x_i} \right] f^i(x(t), u(t)) \right] \\
&= \max_{u(t) \in U} \left[ f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f^i(x(t), u(t)) \right] \\
&= \max_{u(t) \in U} H(x(t), p(t), u(t)) \\
&:= H(x(t), p(t), u^*(t)) = f^0(x(t), u^*(t)) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f^i(x(t), u^*(t)) \\
&:= H^*(x(t), p(t))
\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} u^*(t) &:= \arg \max_{u(t) \in U} H(x(t), p(t), u(t)) \\ &= \bigcap_{v(t) \in U} \left\{ u \in U \mid H(x(t), p(t), u(t)) \geq H(x(t), p(t), v(t)) \right\} \end{aligned}$$

$-\frac{\partial J}{\partial t} = H^*(x(t), p(t))$  を最大化ハミルトン関数という。上の式の両辺を  $x_i(t)$  で偏微分すれば、

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial t \partial x_i(t)} = \frac{\partial H^*(x(t), p(t))}{\partial x_i(t)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial H^*(x(t), p(t))}{\partial p_j(t)} \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial x_i(t)} \right) \quad (9)$$

となる。

(8) の両辺を時間  $t$  で微分すれば、

$$\dot{p}_i(t) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \right) \dot{x}_j(t) + \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial t}, \quad i=1, \dots, n$$

(9) を用いて、

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \cdot f_j(t) - \frac{\partial H^*}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$$

最大化ハミルトン関数  $H^*(x(t), p(t))$  を  $p_j(t)$  で偏微分すれば、

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_j} = f^j, \quad j=1, \dots, n.$$

また  $J$  は十分滑らかであると仮定すれば、

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}, \quad i, j=1, \dots, n.$$

であるから

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \cdot f_j(t) - \frac{\partial H^*}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \cdot f_j(t) - \frac{\partial H^*}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n f_j(t) \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \\ &= -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, n. \end{aligned}$$

これを随伴方程式あるいは共役状態変数という。

時点  $T$  の境界条件  $J(x(T), T) = B(x(T))$  の両辺を  $x_i(T)$  で偏微分すれば、

$$p_i(T) = \frac{\partial J(x(T), T)}{\partial x_i} = \frac{\partial B(x(T))}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n.$$

以上のことをまとめて次の定理を得る。

**定理3** 固定始点（固定左端点）・自由終点（自由右端点）・固定計画区間をもつ自律的・確定的なボルツア型の最適制御問題

$$\max_{(u(t))_0^T} \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + B(x(T))$$

subject to

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$x(0) = x^0 : \text{given},$$

$$x(T) : \text{free}$$

$$T : \text{given}$$

の最適解が  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^*(t) \in U\}$  であるとする。このとき随伴方程式

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$$

の連続な解  $p_i(t)$  が存在し、 $p(t) \neq (0, \dots, 0)$  かつ次の条件を満たす。

1° 任意の  $t \in [0, T]$  に対して、

$$\max_{u(t)} H(x^*(t), p(t), u(t)) = H(x^*(t), p(t), u^*(t)) = H^*(x^*(t), p(t))$$

ここに、

$$H = f^0(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f^i(x(t), u(t)),$$

$$2^\circ \quad p_i(T) = \frac{\partial B(x^*(T))}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n.$$

定理3において、1°を最大値条件、2°を横断性条件という。

$$\dot{x}_i^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}, i = 1, \dots, n$$

をハミルトン正準方程式という。最大化ハミルトン関数を時間  $t \in [0, T]$  で微分すれば、任意の  $t \in [0, T]$  に対して、



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H^*(x^*(t), p(t)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial x_i} \frac{dx_i^*(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial p_i} \frac{dp_i(t)}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial x_i} \frac{\partial H^*}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって、次の定理を得る。

**定理 4** 固定始点（固定左端点）・自由終点（自由右端点）・固定計画期間をもつ自律的・確定的なボルツァ型の最適制御問題

$$\max_{(u(t))_0^T} \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + B(x(T))$$

*subject to*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$x(0) = x^0 : \text{given},$$

$$x(T) : \text{free}$$

$$T : \text{given}$$

に対する最大化ハミルトン関数  $H^*(x^*(t), p(t))$  は、計画期間  $[0, T]$  に亘って一定である<sup>7</sup>。

## II 連続時間で確率的な最適制御のポントリヤーギンの最大値原理

IIにおいて、われわれは、ベルマンの動的計画法を適用して、連続時間確率的最適制御のポントリヤーギンの最大値原理を導出する。

### II-1 伊藤の公式

連続時間の確率過程  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  は、次の確率微分方程式

$$dx_i(t) = f^i(x(t), t) dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), t) dz_{ih_i}(t), i=1, \dots, n, \quad (10)$$

$$x(0) = x^0 : \text{given}, \quad (11)$$

の解過程であるとする。ここに、 $dz_{ih_i}(t)$  ( $i=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i$ ) は、標準ウィナー過程  $z_{ih_i}(t)$  の確率微分で、

$$E_t [dz_{ih_i}(t)] = 0, i=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i \quad (12)$$

---

<sup>7</sup>  $T : \text{free}$ （自由終了時間）の場合は、最大化ハミルトン関数の値は、 $H^*(x^*(t), p(t)) = 0$

$$E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 \right] = dt, i=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i \quad (13)$$

$$E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^n \right] = 0, n=3, 4, \dots, i=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i \quad (14)$$

$$E_t \left[ dt dz_{ih_i}(t) \right] = 0, i=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i \quad (15)$$

$$E_t \left[ dz_{ih_i}(t) dz_{jh_j}(t) \right] = \rho_{ih_i, jh_j}(t) dt, i, j=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i, h_j=1, \dots, n_j \quad (16)$$

なる性質を持つ。ただし、ここに、 $\rho_{ih_i, jh_j}(t)$  は、 $dz_{ih_i}(t)$  と  $dz_{jh_j}(t)$  の相関係数を、 $E_t$  は条件付き期待演算子を示している。

確率過程  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  に対する伊藤の公式を導出する。そのために必要な補題を先ず述べる。

**補題 1** 標準ウィナー過程  $z_{ih_i}(t)$  の確率微分  $dz_{ih_i}(t)$  に対して、

$$\left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 = dt, i=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i \quad (17)$$

**証明** (13), (14) および  $(dt)^2 = 0$  より、

$$V_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 \right] = E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^4 \right] - \left( E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 \right] \right)^2 = 0 - (dt)^2 = 0.$$

よって<sup>8</sup>、

$$\left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 = E \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 \right] = dt.$$

証了

**補題 2** 標準ウィナー過程  $z_{ih_i}(t)$  の確率微分  $dz_{ih_i}(t)$  に対して、

$$dz_{ih_i}(t) dt = 0, i=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i. \quad (18)$$

**証明** (12), (13),  $(dt)^2 = 0$  より

$$\begin{aligned} V_t \left[ dz_{ih_i}(t) dt \right] &= E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) dt \right)^2 \right] - \left( E_t \left[ dz_{ih_i}(t) dt \right] \right)^2 \\ &= (dt)^2 E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 \right] - (dt)^2 \left( E_t \left[ dz_{ih_i}(t) \right] \right)^2 \\ &= (dt)^2 dt - (dt)^2 0^2 = (dt)^3 = 0 \end{aligned}$$

これと (15) より、 $dz_{ih_i}(t) dt = E_t \left[ dz_{ih_i}(t) dt \right] = 0$

証了

<sup>8</sup> 例えば、柳川堯 [34] 『統計数学』近代科学社、1990年、52頁の定理4.8の(3)参照。

**補題3** 2つの標準ウィナー過程  $z_{ih_i}(t)$ ,  $z_{jh_j}(t)$  の確率微分をそれぞれ  $dz_{ih_i}(t)$ ,  $dz_{jh_j}(t)$  とし、 $dz_{ih_i}(t)$  と  $dz_{jh_j}(t)$  の相関係数を

$$\rho_{ih_i, jh_j}(t) = \frac{E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) - E_t \left( dz_{ih_i}(t) \right) \right) \left( dz_{jh_j}(t) - E_t \left( dz_{jh_j}(t) \right) \right) \right]}{\sqrt{V_t \left[ dz_{ih_i}(t) \right]} \sqrt{V_t \left[ dz_{jh_j}(t) \right]}} \quad \text{とする。}$$

このとき、

$$dz_{ih_i}(t) dz_{jh_j}(t) = \rho_{ih_i, jh_j}(t) dt, i, j = 1, \dots, n, h_j = 1, \dots, n_j \quad (19)$$

**証明** (12) より、

$$\begin{aligned} \text{Cov}_t \left[ dz_{ih_i}(t), dz_{jh_j}(t) \right] &= E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) - E_t \left[ dz_{ih_i}(t) \right] \right) \left( dz_{jh_j}(t) - E_t \left[ dz_{jh_j}(t) \right] \right) \right] \\ &= E_t \left[ dz_{ih_i}(t) dz_{jh_j}(t) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

(12), (13) より、

$$V_t \left[ dz_{ih_i}(t) \right] = E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 \right] - \left( E_t \left[ dz_{ih_i}(t) \right] \right)^2 = dt - 0 = dt.$$

これより、

$$\begin{aligned} \rho_{ih_i, jh_j}(t) &= \frac{E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) - E_t \left( dz_{ih_i}(t) \right) \right) \left( dz_{jh_j}(t) - E_t \left( dz_{jh_j}(t) \right) \right) \right]}{\sqrt{V_t \left[ dz_{ih_i}(t) \right]} \sqrt{V_t \left[ dz_{jh_j}(t) \right]}} \\ &= \frac{E_t \left[ dz_{ih_i}(t) \cdot dz_{jh_j}(t) \right]}{\sqrt{dt} \sqrt{dt}} = \frac{\text{Cov}_t \left[ dz_{ih_i}(t), dz_{jh_j}(t) \right]}{dt} \end{aligned}$$

よって、

$$\text{Cov}_t \left[ dz_{ih_i}(t), dz_{jh_j}(t) \right] = \rho_{ih_i, jh_j}(t) dt.$$

これと (20) より

$$E_t \left[ dz_{ih_i}(t) dz_{jh_j}(t) \right] = \text{Cov}_t \left[ dz_{ih_i}(t), dz_{jh_j}(t) \right] = \rho_{ih_i, jh_j}(t) dt \quad (21)$$

(21),  $(dt)^2 = 0$ , 補題1の(17)より、

$$\begin{aligned} V_t \left[ dz_{ih_i}(t) dz_{jh_j}(t) \right] &= E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) dz_{jh_j}(t) \right)^2 \right] - \left( E_t \left[ dz_{ih_i}(t) dz_{jh_j}(t) \right] \right)^2 \\ &= E_t \left[ \left( dz_{ih_i}(t) \right)^2 \left( dz_{jh_j}(t) \right)^2 \right] - \left( E_t \left[ dz_{ih_i}(t) dz_{jh_j}(t) \right] \right)^2 \\ &= E_t \left[ dt \cdot dt \right] - \left( \rho_{ih_i, jh_j}(t) dt \right)^2 = (dt)^2 \left( 1 - \left( \rho_{ih_i, jh_j}(t) \right)^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

これと (21) から<sup>9</sup>、

$$dz_{ih_i}(t)dz_{jh_j}(t) = E_t \left[ dz_{ih_i}(t)dz_{jh_j}(t) \right] = \rho_{ih_ijh_j}(t)dt \quad \text{証了}$$

**補題4** 確率微分方程式 (10) に対して、

$$dtdx_i(t) = 0, i = 1, \dots, n. \quad (22)$$

**証明**  $(dt)^2 = 0$  と補題2の(18)により、

$$\begin{aligned} dtdx_i(t) &= dt \cdot \left( f^i(x(t), t)dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), t)dz_{ih_i}(t) \right) \\ &= f^i(x(t), t)(dt)^2 + \left( \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), t)dz_{ih_i}(t) \right)dt = 0 \end{aligned} \quad \text{証了}$$

**補題5** 確率微分方程式 (10) に対して、

$$dx_i(t)dx_j(t) = \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x(t), t)\sigma_{jh_j}(x(t), t)\rho_{ih_ijh_j}(t), \quad i, j = 1, \dots, n$$

**証明** (10),  $(dt) = 0$  補題2の(18), 補題3の(19)から、

$$\begin{aligned} dx_i(t)dx_j(t) &= \left( f^i(x(t), t)dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}dz_{ih_i}(t) \right) \left( f^j(x(t), t)dt + \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{jh_j}dz_{jh_j}(t) \right) \\ &= f^i(x(t), t) \cdot f^j(x(t), t)(dt)^2 + f^i(x(t), t) \left( \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{jh_j}dz_{jh_j}(t)dt \right) \\ &\quad + f^j(x(t), t) \left( \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}dz_{ih_i}(t)dt \right) + \left( \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}dz_{ih_i}(t) \right) \left( \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{jh_j}dz_{jh_j}(t) \right) \\ &= \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x(t), t)\sigma_{jh_j}(x(t), t)dz_{ih_i}(t)dz_{jh_j}(t) \\ &= \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x(t), t)\sigma_{jh_j}(x(t), t)\rho_{ih_ijh_j}(t)dt \end{aligned}$$

証了

<sup>9</sup> 例えば、柳川堯 [34] 『統計数学』近代科学社、1990年、52頁の定理4.8の(3)参照。

**定理5**（伊藤の公式<sup>10</sup> *Ito's formula*）確率過程  $x(t)$  を確率微分方程式 (10) の解とし、 $F(t, x(t))$  を、 $t$  に関して1回連続微分可能、 $x$  に関して2回連続微分可能な任意のスカラー関数とする。

このとき、確率過程  $F(t, x(t))$  の確率微分  $dF$  は、

$$dF = \left( F_t + \sum_{i=1}^n F_i f^i(x(t), t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} F_{ij} \sigma_{ih_i}(x(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), t) \rho_{ih_i h_j}(t) \right) dt \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} F_i \sigma_{ih_i}(x(t), t) \quad (24)$$

である。ただし、ここに、 $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$ ,  $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ ,  $F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  とする。

### 証明の概略

$(dt)^k = 0$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) , 補題4の(22) 補題5の(23) から

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right]^k F(t, x(t)) = 0, k = 3, 4, \dots$$

となり、

$$dF = F_t dt + \sum_{i=1}^n F_i dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij} dx_i dx_j$$

(10) と補題5の(23) から、

$$= F_t dt + \sum_{i=1}^n F_i \left( f^i(x(t), t) dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i} dz_{ih_i}(t) \right) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij} \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), t) \rho_{ih_i h_j}(t) dt \\ = \left( F_t + \sum_{i=1}^n F_i f^i(x(t), t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} F_{ij} \sigma_{ih_i}(x(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), t) \rho_{ih_i h_j}(t) \right) dt \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} F_i \sigma_{ih_i}(x(t), t) dz_{ih_i}(t)$$

証了

いま、定理5の  $F(t, x(t))$  の期待時間変化率を

---

<sup>10</sup> 伊藤清 企画・監修 渡辺信三・重川一郎 編 [13] 『確率論ハンドブック』丸善出版、2012年、定理1.53、79頁 あるいは谷口説男 [31] 『確率微分方程式』共立出版、2016年、定理4.13、94-100頁を参照。

$$\tilde{F}(t, x(t)) := \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{E_t \left[ dF(t, x(t)) \right]}{dt} \quad (25)$$

と定義し、微分生成作用素を

$$L(\bullet) := \left[ \sum_{i=1}^n f^i(x(t), t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), t) \rho_{ih_j h_j}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right](\bullet) \quad (26)$$

と定義する。

**定理6** 確率過程  $x(t)$  を、確率微分方程式 (10), (11) の解とする。このとき、

$$\tilde{F}(t, x(t)) = F_t(t, x(t)) + L(F(t, x(t))) \quad (27)$$

が成立する。

**証明** (12) と定理5 の (24) より、

$$\begin{aligned} E_t \left[ dF(t, x(t)) \right] &= E_t \left[ \left[ F_t + \sum_{i=1}^n F_i f^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} F_{ij} \sigma_{ih_i} \sigma_{jh_j} \rho_{ih_j h_j}(t) \right] dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} F_i \sigma_{ih_i}(x(t), t) dz_{ih_i}(t) \right] \\ &= \left[ F_t(t, x(t)) + \sum_{i=1}^n F_i(t, x(t)) f^i(x(t), t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} F_{ij}(t, x(t)) \sigma_{ih_i}(x(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), t) \rho_{ih_j h_j}(t) \right] dt \\ &= E_t \left[ \left( F_t + \sum_{i=1}^n F_i f^i(x(t), t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} F_{ij} \sigma_{ih_i}(x(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), t) \rho_{ih_j h_j}(t) \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} F_i \sigma_{ih_i}(x(t), t) dz_{ih_i} \right] \\ &= \left( F_t + \sum_{i=1}^n F_i f^i(x(t), t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} F_{ij} \sigma_{ih_i}(x(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), t) \rho_{ih_j h_j}(t) \right) dt \end{aligned}$$

これと (25) から、

$$\tilde{F}(t, x(t)) = F_t(t, x(t)) + L(F(t, x(t))) \quad \text{証了}$$

**定理7** (デンキンの公式 *Dynkin's formula*) 確率過程  $x(t)$  を確率微分方程式 (10) の解とし、 $F(t, x(t))$  を、 $t$  に関して1回連続微分可能、 $x$  に関して2回連続微分可能な任意のスカラー関数とする。このとき、 $0 \leq s \leq t$  に対して、 $E_s[F(t, x(t))]$  が存在すれば、

$$E_s[F(t, x(t))] - F(s, x(s)) = E_s \int_s^t [F_\tau(\tau, x(\tau)) + L(F(\tau, x(\tau)))] d\tau \quad (28)$$

が成り立つ。

**証明** 定理5の(24)と微分生成作用素も定義(26)から、 $dF$ を微分生成作用素を用いて表せば、

$$\begin{aligned} dF &= \left( F_t + \sum_{i=1}^n F_i f^i(x(t), t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} F_{ij} \sigma_{ih_i}(x(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), t) \rho_{ih_i h_j}(t) \right) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} F_i \sigma_{ih_i}(x(t), t) dz_{ih_i}(t) \\ &= [F_t + L(F)] dt + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} F_i \sigma_{ih_i}(x(t), t) dz_{ih_i}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} F_i \sigma_{ih_i}(x(t), t) dz_{ih_i}(t) \end{aligned}$$

となるので、この積分形式は、 $0 \leq s \leq t$  に対して、

$$\begin{aligned} F(t, x(t)) - F(s, x(s)) &= \int_s^t [F_\tau(\tau, x(\tau)) + L(F(\tau, x(\tau)))] d\tau \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \int_s^t F_i(\tau, x(\tau)) \sigma_{ih_i}(x(\tau), \tau) dz_{ih_i}(\tau) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} E_s[F(t, x(t))] - F(s, x(s)) &= E_s \int_s^t [F_\tau(\tau, x(\tau)) + L(F(\tau, x(\tau)))] d\tau \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} E_s \int_s^t F_i(\tau, x(\tau)) \sigma_{ih_i}(x(\tau), \tau) dz_{ih_i}(\tau) \end{aligned}$$

これと確率積分の性質<sup>11</sup>

$$E_s \int_s^t F_i(\tau, x(\tau)) \sigma_{ih_i}(x(\tau), \tau) dz_{ih_i}(\tau) = 0$$

より、

$$E_s[F(t, x(t))] - F(s, x(s)) = E_s \int_s^t [F_\tau(\tau, x(\tau)) + L(F(\tau, x(\tau)))] d\tau$$

証了

<sup>11</sup> 伊藤清 [11] 『確率論』(現代数学14) 岩波書店、1953年、339頁の定理64.1の(1.5)あるいは、B. エクセンダー『確率微分方程式 入門から応用まで』丸善出版、2012年、33頁の定理3.2.1の(III)参照。

## II-2 連続時間で確率的な最適制御のハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式

制御ベクトル  $u(t) \in U$  (制御領域) を含む状態ベクトル  $x(t)$  の確率微分方程式

$$dx_i(t) = f^i(x(t), u(t), t)dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t)dz_{ih_i}(t), i=1, \dots, n \quad (10)$$

$$x(0) = x^0 : \text{given}, \quad (11)$$

$$x(T) = x^T : \text{free} \quad (29)$$

$$T : \text{given} \quad (30)$$

を制約条件とし、ボルツァ型の目的関数

$$E_0 \left[ \int_0^T f^0(x(t), u(t), t)dt + B(x(T), T) \right] \quad (31)$$

を制御  $(u(t))_0^T$  に関して最大化せよという、固定始点・自由終点・固定計画期間をもつ非自律的<sup>12</sup>・ボルツァ型の連続時間で確率的な最適制御問題を考える。

ここに、 $dz_{ih_i}(t), i=1, \dots, n, h_i=1, \dots, n_i$  は、標準ウィナー過程  $z_{ih_i}(t)$  の確率微分で前節の (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18) および (19) なる性質をもつ。

任意の時点  $t \in [0, T]$  における  $x(t) = x^T$  を初期状態とする最値関数  $J(x(t), t)$  を、

$$J(x(t), t) := \max_{(u(\tau))_t^T} \left[ \int_t^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right] \quad (32)$$

subject to

$$\begin{cases} dx_i(t) = f^i(x(t), u(t), t)dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t)dz_{ih_i}(t) \\ x(t) = x^T : \text{given} \\ x(T) : \text{free} \\ T : \text{given} \end{cases}$$

と定義する。

$J(x(t), t)$  は十分滑らかな関数であると仮定する。

$$J(x(t), t) := \max_{(u(\tau))_t^T} \left[ \int_t^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right]$$

十分小さい  $dt(>0)$  に対して、

$$= \max_{(u(\tau))_t^T} E_t \left[ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+dt}^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right]$$

<sup>12</sup>  $f^0(\cdot), f^i(\cdot) (i=1, \dots, n), \sigma_{ih_i}(\cdot) (h_i=1, \dots, n_i), B(\cdot)$  が陽表的に、時間  $t$  や  $T$  を含む。



期待値の性質により

$$= \max_{(u(\tau))_t^T} \left\{ E_t \left[ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] + E_t \left[ \int_{t+dt}^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right] \right\}$$

条件付き期待値の塔の性質<sup>13</sup>により

$$= \max_{(u(\tau))_t^T} \left\{ E_t \left[ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] + E_t \left[ E_{t+dt} \left[ \int_{t+dt}^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right] \right] \right\}$$

期待値の性質により

$$= \max_{(u(\tau))_t^T} \left\{ E_t \left[ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + E_{t+dt} \left[ \int_{t+dt}^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right] \right] \right\}$$

動的計画法の最適性の原理<sup>14</sup>により、

$$= \max_{(u(\tau))_t^T} \left\{ E_t \left[ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \max_{(u(\tau))_{t+dt}^T} E_{t+dt} \left[ \int_{t+dt}^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right] \right] \right\}$$

$J(x(t+dt), t+dt)$  の定義により

$$= \max_{(u(\tau))_t^T} \left\{ E_t \left[ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + J(x(t+dt), t+dt) \right] \right\}.$$

上の式の両辺から  $J(x(t), t)$  を引けば、

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{(u(\tau))_t^{t+dt}} \left\{ E_t \left[ \int_t^{t+dt} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + J(x(t+dt), x+dt) - J(x(t), t) \right] \right\} \\ &= \max_{(u(\tau))_t^{t+dt}} \left\{ E_t \left[ f^0(x(t), u(t), t) dt + O(dt) + J(x(t+dt), x+dt) - J(x(t), t) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ここに、} O(dt) \text{ は、} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{O(dt)}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} &= \max_{u(t) \in U} \left\{ E_t \left[ f^0(x(t), u(t), t) dt + O(dt) + J(x(t+dt), x+dt) - J(x(t), t) \right] \right\} \\ &= \max_{u(t) \in U} \left\{ f^0(x(t), u(t), t) dt + O(dt) + E_t \left[ J(x(t+dt), x+dt) - J(x(t), t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

13 舟木直久 [9] 『確率論』朝倉書店、2004年。命題3.29の(4)、91頁。谷口説男・松本裕行 [32] 『確率解析』培風館、2013年、定理1.4.1の(6) 1.4.1、11頁。または、谷口説男 [31] 『確率微分方程式』共立出版、2016年、定理1.34の(5)、23頁などを参照。

14 リチャード・ベルマン [2] 『ダイナミック・プログラミング』東京図書、1973年。「最適政策は、最初の状態及び最初の決定が何であっても、残りの決定は最初の決定から生じる状態に関して最適政策を構成しなければならないという性質をもつ。」

両辺を  $dt(>0)$  で割ると

$$0 = \max_{u(t) \in U} \left\{ f^0(x(t), u(t), t) dt + \frac{O(dt)}{dt} + \frac{1}{dt} E_t [J(x(t+dt), x+dt) - J(x(t), t)] \right\}.$$

$dt \rightarrow 0$  なる極限操作を行うと

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{u(t) \in U} \left\{ f^0(x(t), u(t), t) dt + \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E_t [J(x(t+dt), x+dt) - J(x(t), t)] \right\} \\ 0 &= \max_{u(t) \in U} \left\{ f^0(x(t), u(t), t) dt + \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E_t [dJ(x(t), t)] \right\}. \end{aligned}$$

(25) により、

$$0 = \max_{u(t) \in U} \left\{ f^0(x(t), u(t), t) dt + \tilde{J}(x(t), t) \right\}$$

定理6の(27)を適用して

$$0 = \max_{u(t) \in U} \left\{ f^0(x(t), u(t), t) dt + J_t(x(t), t) + L^u(J(x(t), t)) \right\}. \quad (33)$$

ここに、 $L^u(J(x(t), t))$  は、制御ベクトル  $u(t) \in U$  を含む確率微分方程式(10)に対する微分生成作用素

$$\begin{aligned} &L^u(J(x(t), t)) \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n f^i(x(t), u(t), t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), u(t), t) \rho_{ih_i jh_j}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] J(x(t), t) \quad (34) \end{aligned}$$

である。

(33)を連続時間で確率的最適制御のハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式という。

(32)より

$$J(x(T), T) := \max_{(u(\tau))_t^T} \left[ \int_T^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right] = B(x(T), T) \quad (35)$$

である。

$J(x(t), t)$  は、(34), (35) を満たすものでなければならない。よって、次の定理を得る。

**定理 8** 固定始点・自由終点・固定計画期間をもつ非自律的・ボルツア型の連続時間確率的最適制御問題

$$\begin{aligned} & \max_{(u(t))_0^T} E_0 \left[ \int_0^T f^0(x(t), u(t), t) dt + B(x(T), T) \right] \\ & \text{subject to} \\ & \begin{cases} dx_i(t) = f^i(x(t), u(t), t) dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t) dz_{ih_i}(t), i=1, \dots, n. \\ x(0) = x^0 : \text{given} \\ x(T) : \text{free} \\ T : \text{given} \end{cases} \end{aligned}$$

の最適制御  $(u^*(t))_0^T$  は、

最大値条件：任意の  $t \in [0, T]$  に対して、

$$\begin{aligned} 0 &= f^0(x(t), u^*(t), t) dt + J_t(x(t), t) + L(J(x(t), t)) \\ &= \max_{u(t) \in U} \left\{ f^0(x(t), u(t), t) dt + J_t(x(t), t) + L(J(x(t), t)) \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

と

$$\text{境界条件： } J(x(T), T) = B(x(T), T) \quad (35)$$

を満足していなければならない<sup>15</sup>。

**定理 9** 制御ベクトル  $u(t) \in U$  を含む状態ベクトル  $x(t)$  の確率微分方程式 (10)、その初期条件 (11)、終端条件 (29) および計画期間に関する (30)、最大値条件 (36) および境界条件 (35) を満たす解  $\{(x^*(t), u^*(t)) : t \in [0, T], u^*(t) \in U\}$  は、定理 8 の固定始点・自由終点・固定計画期間をもつ非自律的・ボルツア型の連続時間確率的最適制御問題の最適解である<sup>16</sup>。

**証明** 2つの解  $\{x(t), u(t) : t \in [0, T], u(t) \in U\}$  と  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^*(t) \in U\}$  に対して、(36) より

$$\begin{aligned} & f^0(x(t), u^*(t), t) + J_t(t, x(t)) + L(J(t, x(t))) \\ & \geq f^0(x(t), u(t), t) + J_t(t, x(t)) + L(J(t, x(t))). \end{aligned} \quad (37)$$

<sup>15</sup> 最大値条件と境界条件は、最適制御であるための必要条件である。

<sup>16</sup> 最大値条件と境界条件は、最適制御であるための十分条件である。

定理7 (デンキンの公式) から,  $J(x(t), t)$  に対して、

$$E_0[J(x(T), T)] - J(x(0), 0) = E_0 \int_0^T [J_t(x(t), t) + L^u(J(x(t), t))] dt \quad (38)$$

また  $J(x^*(t), t)$  に対して、

$$E_0[J(x^*(T), T)] - J(x^*(0), 0) = E_0 \int_0^T [J_t(x^*(t), t) + L^{u^*}(J(x^*(t), t))] dt \quad (39)$$

がそれぞれ成り立つ。ここに、 $L^{u^*}(J(x^*(t), t))$  は、

$$L^u(J(x^*(t), t)) = \left[ \sum_{i=1}^n f^i(x^*(t), u^*(t), t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x^*(t), u^*(t), t) \sigma_{jh_j}(x^*(t), u^*(t), t) \rho_{ih_j h_j}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] J(x^*(t), t) \quad (40)$$

である。

2つの解  $\{x(t), u(t) : t \in [0, T], u(t) \in U\}$  と  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^*(t) \in U\}$  は、ともに (11) を満たすので、

$$x(0) = x^*(0) = x^0 : \text{given}$$

であるから、

$$J(x(0), 0) = J(x^*(0), 0) = J(x^0, 0) \quad (41)$$

(37) の両辺を計画期間  $[0, T]$  にわたって積分し期待値をとれば、

$$\begin{aligned} & E_0 \int_0^T f^0(x(t), u^*(t), t) dt + E_0 \int_0^T [J_t(t, x(t)) + L^{u^*}(J(t, x(t)))] dt \\ & \geq E_0 \int_0^T f^0(x(t), u(t), t) dt + E_0 \int_0^T [J_t(t, x(t)) + L(J(t, x(t)))] dt. \end{aligned}$$

これと (38), (39) より、

$$\begin{aligned} & E_0 \int_0^T f^0(x(t), u^*(t), t) dt + E_0 [J(x^*(T), T)] - J(x^*(0), 0) \\ & \geq E_0 \int_0^T f^0(x(t), u(t), t) dt + E_0 [J(x(T), T)] - J(x(0), 0). \end{aligned}$$

これと (41) および 2つの解  $\{x(t), u(t) : t \in [0, T], u(t) \in U\}$  と  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^*(t) \in U\}$  がともに (35) を満たすから、

$$E_0 \int_0^T f^0(x(t), u^*(t), t) dt + B(x^*(T), T) \geq E_0 \int_0^T f^0(x(t), u(t), t) dt + B(x(T), T)$$

証了

### II-3 連続時間で確率的な最適制御のポントリヤーギン・タイプの最大値原理

II-2 の連続時間で確率的な最適制御のハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式 (33) を用いて連続時間で確率的な最適制御のポントリヤーギン・タイプの最大値原理 *Pontryagin-Type Stochastic Maximum Principle in Continuous-Time* を導出する。

いま、随伴ベクトル  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$  を

$$p_i(t) := \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial x_i(t)} = J_i(x(t), t), i = 1, \dots, n$$

と定義し<sup>17</sup>、連続時間で確率的な最適制御のハミルトン関数

$$\begin{aligned} H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u(t)\right) & \text{を、} \\ H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u(t)\right) & := f^0(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f^i(x(t), u(t), t) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), u(t), t) \rho_{ih_i, jh_j}(t) \end{aligned} \quad (42)$$

と定義する。

II-2 の (33), (34) から

$$-J_t(x(t), t) = \max_{u(t) \in U} \left\{ f^0(x(t), u(t), t) dt + L^u(J(x(t), t)) \right\}.$$

(42) から

$$\begin{aligned} & = \max_{u(t) \in U} H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u(t)\right) \\ & = H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u^*(t)\right) \\ & = H^*\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}\right). \end{aligned} \quad (43)$$

<sup>17</sup> Malliaris, A. G. and W. A. Brock[20] *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland の 110 頁の (10.13) に倣う。

ただし、それぞれ

$$H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u^*(t)\right) := \max_{u(t) \in U} H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u(t)\right)$$

$$H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u^*(t)\right) := H^*\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}\right)$$

と定義している。(43)の最右辺  $H^*\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}\right)$  を連続時間で確率的な最適制御問題の最大化ハミルトニアンという。

(43)の最左辺と最右辺の両辺を  $x_k(t)$  で偏微分すれば、

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 J}{\partial t \partial x_k}\right) &= \frac{\partial H^*}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial H^*}{\partial \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right)} \frac{\partial \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right)}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial H^*}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n f^i(x(t), u^*(t), t) \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), u(t), t) \rho_{ih_j h_j}(t) \frac{\partial^2 p_i}{\partial x \partial x_k} \\ &= \frac{\partial H^*}{\partial x_k} + L^{u^*}(p_k(t)), k=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (44)$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} &L^u(p_k(t)) \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n f^i(x^*(t), u^*(t), t) \frac{\partial}{\partial x_i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \sigma_{ih_i}(x^*(t), u^*(t), t) \sigma_{jh_j}(x^*(t), u^*(t), t) \rho_{ih_j h_j}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] p_k(t) \end{aligned}$$

である。(44)の導出に際して、

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \left(\frac{\partial J}{\partial x_i}\right)}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 J}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial \left(\frac{\partial J}{\partial x_k}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, i, k=1, \dots, n,$$

および

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial J}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 J}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 J}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \left( \frac{\partial J}{\partial x_k} \right)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_i \partial x_j}, i, j, k = 1, \dots, n,$$

を仮定した。

$p_i(t)$  の確率微分  $dp_i(t)$  は、定理5を適用して、

$$\begin{aligned} dp_i(t) &= dJ_i(x(t), t) \\ &= \left( J_{it} + \sum_{j=1}^n J_{ij} f^j(x(t), u^*(t), t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{h_j=1}^{n_j} \sum_{h_k=1}^{n_k} J_{ijk} \sigma_{jh_j}(x(t), u^*(t), t) \sigma_{kh_k}(x(t), u^*(t), t) \rho_{jh_j h_k}(t) \right) dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{h_j=1}^{n_j} J_{ij} \sigma_{jh_j}(x(t), u^*(t), t) dz_{jh_j}, \end{aligned}$$

微分生成作用素  $L^{u^*}$  を用いて表すと

$$= \left[ J_{it} + L^{u^*} \left( J_i(x(t), t) \right) \right] dt + \sum_{j=1}^n \sum_{h_j=1}^{n_j} J_{ij} \sigma_{jh_j}(x(t), u^*(t), t) dz_{jh_j}(t)$$

(42) より

$$= \left[ J_{it} + L^{u^*} \left( p_i(x(t)) \right) \right] dt + \sum_{j=1}^n \sum_{h_j=1}^{n_j} p_{ij} \sigma_{jh_j}(x(t), u^*(t), t) dz_{jh_j}(t)$$

(44) より

$$\begin{aligned} &= \left[ -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} - L^{u^*} \left( p_i(x(t)) \right) + L^{u^*} \left( p_i(x(t)) \right) \right] dt + \sum_{j=1}^n \sum_{h_j=1}^{n_j} p_{ij} \sigma_{jh_j}(x(t), u^*(t), t) dz_{jh_j}(t) \\ &= -\frac{\partial H^*}{\partial x_k} dt + \sum_{j=1}^n \sum_{h_j=1}^{n_j} p_{ij} \sigma_{jh_j}(x(t), u^*(t), t) dz_{jh_j}(t), i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (45)$$

境界条件 (35) の両辺を  $x_i(T)$  で偏微分すれば、(42) より

$$p_i(T) = \frac{\partial J(x(T), T)}{\partial x_i(T)} = \frac{\partial B(x(T), T)}{\partial x_i(T)}, i = 1, \dots, n.$$

確率的最適制御のハミルトン関数 (42) の両辺を  $p_i(t)$  で偏微分すれば、

$$\frac{\partial H}{\partial p_i(t)} = f^i(x(t), u(t), t), i = 1, \dots, n$$

であるから、制御ベクトル  $u(t) \in U$  を含む、状態ベクトル  $x(t)$  の確率微分方程式 (10) は、

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= f^i(x(t), u(t), t)dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t) dz_{ih_i}(t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i(t)} dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t) dz_{ih_i}(t), i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

と表せる。

以上の事柄をまとめて次の定理を得る。

**定理 10** (固定始点・自由終点・固定計画期間をもつ非自律的・ボルツア型の連続時間で確率的な最適制御のポントリヤーゲン・タイプの最大値原理 *Pontryagin-Type Stochastic Maximum Principle in Continuous-Time*)

連続時間確率的最適制御問題

$$\begin{aligned} &\max_{(u(t))_0^T} \left[ \int_0^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(T), T) \right] \\ &\text{subject to} \\ &\begin{cases} dx_i(t) = f^i(x(t), u(t), t)dt + \sum_{h_i=1}^{n_i} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t) dz_{ih_i}(t), i = 1, \dots, n \\ x(0) = x^0 : \text{given} \\ x(T) : \text{free} \\ T : \text{given} \end{cases} \end{aligned}$$

の最適解が  $\{x^*(t), u^*(t) : t \in [0, T], u^*(t) \in U\}$  であるとする。このとき、随伴方程式

$$dp_i(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} dt + \sum_{j=1}^n \sum_{h_j=1}^{n_j} p_{ij}(t) \sigma_{jh_j}(x(t), u^*(t), t) dz_{jh_j}(t), i = 1, \dots, n$$

を満足する随伴ベクトル  $p(t)$  が存在し、次の条件を満たす。

1° 任意の  $t \in [0, T]$  に対して

$$\max_{u(t)} H \left( x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u(t) \right)$$



$$\begin{aligned}
&= H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u^*(t)\right) \\
&= H^*\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}\right),
\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
H\left(x(t), p(t), \frac{\partial p(t)}{\partial x(t)}, u(t)\right) &:= f^0(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^n p_i(t) f^i(x(t), u(t), t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h_i=1}^{n_i} \sum_{h_j=1}^{n_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \sigma_{ih_i}(x(t), u(t), t) \sigma_{jh_j}(x(t), u(t), t) \rho_{ih_i jh_j}(t) .
\end{aligned}$$

$$2^\circ \quad p_i(T) = \frac{\partial B(x^*(T), T)}{\partial x_i(T)}, i = 1, \dots, n.$$

## 参考文献

- [1] Bellman, R. *Dynamic Programming*. Dover (2003) Unabridged Republication of the edition published by Princeton University Press, 1957.
- [2] ベルマン, R. 『ダイナミック・プログラミング』(小田中敏夫他訳) 東京図書, 1973年.
- [3] Bjork, T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 3rd ed. Oxford University Press, 2009.
- [4] Chang, F.-R. *Stochastic Optimization in Continuous Time*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] Duffie, D. *Security Markets : Stochastic Models*. Academic Press, 1988.
- [6] Dumas, B. and Luciano, E. *The Economics of Continuous-Time Finance*. The MIT Press, 2017.
- [7] Fleming, W. H. and Rishel, R. W. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag, 1975.
- [8] Fleming, W. H. and Soner, M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer, 1993.
- [9] 舟木直久『確率論』朝倉書店, 2004年.
- [10] 板垣有記輔『動的最適化と経済理論』多賀出版, 1985年.
- [11] 伊藤清『確率論』(現代数学14) 岩波書店, 1953年.
- [12] 伊藤清『確率論』(岩波基礎数学選書) 岩波書店, 1991年.
- [13] 伊藤清 企画・監修 渡辺信三・重川一郎 編『確率論ハンドブック』丸善出版, 2012年.
- [14] Kamien, M. I. and Schwartz, N. L. *Dynamic Optimization : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Dover (2012) republication of the 2nd ed. published by Elsevier Science, 1991.
- [15] Klenke, A. *Probability Theory : A Comprehensive Course*. 2nd ed., Springer, 2008.
- [16] Korn, R. and Korn, E. *Option Pricing and Portfolio Optimization: Modern Methods of Financial Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.
- [17] Kushner, H. *Introduction to Stochastic Control*. Holt, Rinehart and Winston, 1971.
- [18] Lu, Qi and Zhang, X. *General Pontryagin-Type Stochastic Maximum Principle And Backward Stochastic Evolution Equations In Infinite Dimensions*. Springer, 2014.
- [19] Lyasoff, A. *Stochastic Methods in Asset Pricing*. The MIT Press, 2017.
- [20] Malliaris, A. G. and Brock, W. A. *Stochastic Methods in Economics and Finance*. North-Holland, 1982.
- [21] Merton, R. C. *Continuous-Time Finance*. Blackwell, 1992.

- [22] 西尾眞喜子・樋口保成『確率過程入門』初版 培風館, 2006年. 13章 確率制御理論, pp.215-224.
- [23] Nisio Makiko *Stochastic Control Theory : Dynamic Programming Principle*. 2nd ed. Springer, 2015.
- [24] Øksendal, B. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. 6th ed. Springer, 2010.
- [25] エクセンドール, B.『確率微分方程式 入門から応用まで』(谷口説男訳) 丸善出版, 2012年. 原著第5版の邦訳.
- [26] Øksendal, B. and Sulem, A. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. 3rd ed. Springer, 2019.
- [27] Pham, H. *Continuous-Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Springer, 2009.
- [28] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., and Mishchenko, E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley, 1962.
- [29] ポントリヤーギン, S. 他『最適過程の数学理論』(関根智明訳) 文一総合図書, 1967年.
- [30] Stokey, N. L. and Lucas Jr., E. with Prescott, E. C. *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press, 1989.
- [31] 谷口説男『確率微分方程式』共立出版, 2016年.
- [32] 谷口説男・松本裕行『確率解析』培風館, 2013年.
- [33] Weitzman, M. L. *Income, Wealth and the Maximum Principle*. Harvard University Press, 2003.
- [34] 柳川堯『統計数学』近代科学社, 1990年.
- [35] Yong, J. and Zhou, X. Y. *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Springer, 1999.

# 気候変動がスリランカのコメ生産、 国民経済に及ぼす影響 — 応用一般均衡モデルによる分析 —

Effects of Climate Change on Sri Lankan Rice Production and Economy  
— Applied General Equilibrium Approach —

齋藤 之美<sup>1</sup>・齋藤 勝宏<sup>2</sup>・佐藤 秀保<sup>3</sup>  
チャトラ ワインツンガ<sup>4</sup>

Konomi SAITO, Katsuhiro SAITO, Hideyasu SATO  
and Chatura Sewwandi WIJETUNGA

## 1. はじめに

インド南東に位置するスリランカは 1948 年にイギリスからセイロンとして独立し、1978 年以降スリランカ社会主義共和国となっている。2017 年のデータで見ると、人口 2,120 万人、ひとりあたり GDP は 2000 年の固定価格表示で 3,850 米ドル、経済成長率は年率 3.3% を記録している。2016 年時点での貧困率は 4.1% であり、年々改善する傾向にある。年平均気温は摂氏 27 ～ 28 度で年間を通して変動が少ない。島の中央部のワバラガムワ州には標高 2,238m のアダムスピークと呼ばれる山があり、気温は摂氏 15 度程度と冷涼である。スリランカでは雨季は年二回訪れる。4 月から 6 月にかけて南西季節風からもたらされるものと、10 月から 11 月にかけて北東季節風によってもたらされるものである。降水パターンを見ると、北部州や東部州では北東季節風によってもたらされる雨季の降水量が多い傾向にある。また、西部州や南部州ではふたつの雨季の降水量がほぼ同量となっている。北部や東部は比較的降水量が少なく乾燥地帯と呼ばれているが、溜池灌漑が発達しており、二期作が可能である。11 月から 3 月にかけて作付される時期を **Maha** 期、5 月から 9 月にかけて作付される時期を **Yala** 期という。降水量が多い **Maha** 期がメインとなる。実際、県別 (district) の稲の作付面積を見ると一般に **Maha** 期の作付面積の方が **Yala** 期の作付面積よりも多い傾向にあるが、**Yala** 期の降水量に恵まれている西部州や南部州では両期に作付面積がほぼ等しい県もある。主な農産物はコメであるため、乾燥地帯での貧困率が高い傾向に

1 創価大学 経済学部

2 東京大学 農業・資源経済学専攻

3 一橋大学 経済研究所

4 Faculty of Animal Science and Export Agriculture, Uva Wellassa University

ある。図1は、スリランカのコメの生産量、消費量、輸入量などを示したものである。これを見ると、2000年代の半ばにはほぼ自給を達成したことを確認することができる。また、生産量の変動が大きいこと、収量の推移と比べると、生産量の変動は収穫面積の変動によってもたらされていることがわかる。生産量の水準如何では、生産量が消費量に追いつかず、輸入によって国内供給を補っている。

IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change 気象変動に関する政府間パネル) によると21世紀末の平均気温上昇は、温室効果ガスの濃度が最も高くなるシナリオで4度、最も濃度を低く抑えるシナリオでも約2度と予想されており、農業生産に大きな影響を及ぼす。農業生産への影響は地域によっても異なるが、熱帯から亜熱帯地域にかけては穀物収量が減少し、温帯では増加する傾向が見られる (Furuya et al. 2015)。熱帯から亜熱帯にかけてはアフリカや南アジアなどの発展途上国が多く含まれている。農業生産の減少は先進諸国にとっては大きな問題ではないが、GDPに占める農業のシェアの高い発展途上国にとっては、農業所得やGDP、更には貧困に及ぼす影響は無視できるものではない。そこで本研究では、スリランカを対象に気候変化が農業生産の減少を媒介に、食料価格、一国のマクロ経済に及ぼす影響と貧困問題へのインプリケーションについて応用一般均衡モデルを利用して評価する。

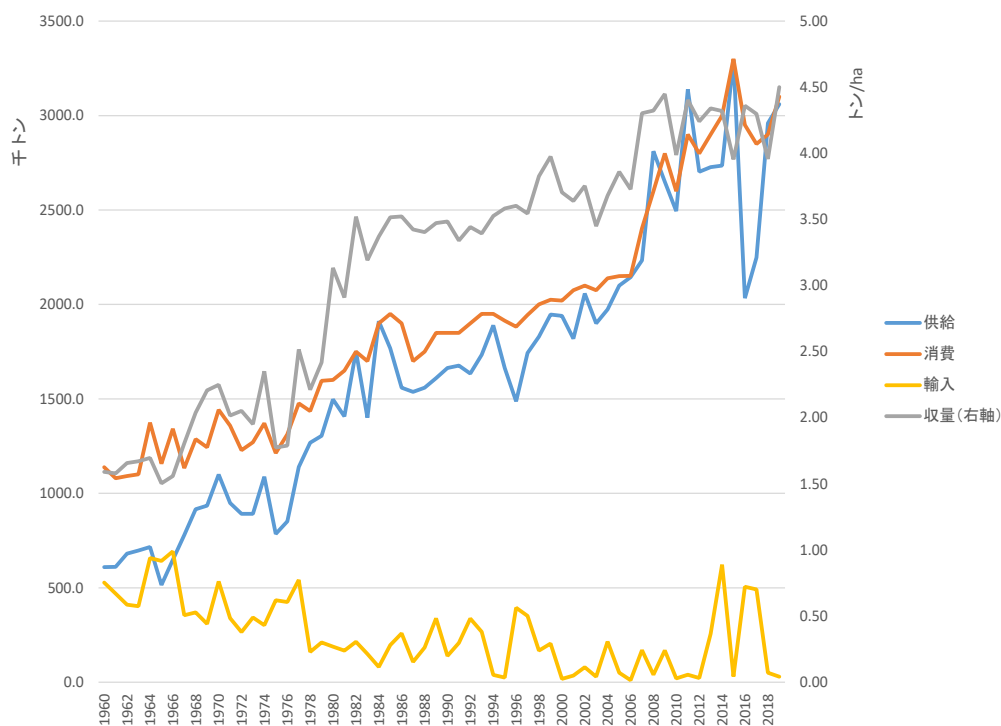


図1 コメの生産、消費および収量の推移  
出所：ERS/USDAPSD データより作成

## 2. 気候変化が農業生産に及ぼす影響

### 2.1 既往の研究

気象変動がスリランカの農業生産に及ぼす影響については、それほど多く理解されているわけではない。スリランカにおける将来の気候変化を予測する研究や気象変動が、スリランカの農業生産に及ぼす影響を評価する研究がそれほど多くはないからである。それにもかかわらず、スリランカは気象変動の影響をより受けやすいものと思われる。というのは、農業など気象変動の影響を受けやすい部門がスリランカの経済の大きな割合を占めていること、気候変化に適応する機会が乏しいと考えられる労働集約的な生産技術が経済活動のベースとなっているからである (Mendelsohn et al. 2001)。以下では、数少ない研究の中から、気候変化がスリランカの農業生産へ及ぼす影響について考察したものを展望したい。

Eriyagama and Smakhtin (2009) はスリランカの平均気温が、北東モンスーン (11月～2月) で約2.9度、南西モンスーン (5月～9月) で約2.5度上昇するだろうと予測している。また、降水量に関して Silva et al. (2007) は、HadCM3 (Hadley Centre Coupled Model, version 3) の結果から抽出した 2050 年におけるスリランカの気候変化データを用いて、雨季の降水量は 9% から 17% 減少し、雨季の終了する時期が早まり、蒸発散量が 3% から 3.5% 上昇することを見いだししている。降水量が減少するため、稲作における灌漑用水需要は平均で 13%～23% 増加すると予測されている。加えて、Fernando and Chandrapala (1992)、Chandrapala (1996,1997)、Domroes (1996) などの研究によると、スリランカの降水量はこれまでも徐々に減少してきているという。例えば、1931 年から 1960 年の年間平均降水量は 2005mm だったが、1961 年から 1990 年の年平均降水量は 1861mm まで減少してきている (Domroes and Schaefer, 2000)。一方、Madduma Bandara and Wickramagamage (2004) は、Nuwara Eliya の周囲の中央丘陵地帯の集水域を対象とする研究では、1900 年から 2002 年にかけて年間降水量が有意な下降トレンドを示すことを明らかにしている。

Seo et al. (2005) は Ricardian method を使って気象変動がスリランカの農業所得に及ぼす影響について考察している。Ricardian method というのは、農家が与えられた環境の下で単位面積当たりの所得を最大化するように投入量を決定するという仮定の下で、農業所得関数を推計する方法である。農業所得関数は、単位面積当たりの農業所得を気温と降水量の二次式に回帰して推計されている<sup>5</sup>。対象は、コメ、ココナッツ、ゴム、茶の 4 品目である。地域によって、作付する作物構成や単位面積当たりの農業所得が異なるので、地域ごとに気候変化の影響は異なる。気候変化の将来シナリオによっても結果が異なるが、概ね所得が 20% 減少から 72% 増加するという結果が得られている。Kurukulasuriya and Ajwad (2007) も、Seo et al. (2005) と同様に Ricardian method を応用して、気候変化が小規模農家に及ぼす影響について推計し、農家の所得変動の半

5 推計式は、 $NR_i = a_0 + \sum_s (a_s T_s + b_s T_s^2 + c_s P_s + d_s P_s^2) + \sum_c f_c Z_c + \varepsilon$ 。但し、T は気温、P は降水量、Z は地域属性を表す。また、s は季節を表す添字である。

分は気候変化とは関係が無いことを明らかにしているものの、作物生産にとって重要な月の降水量減少の影響は甚大でありうることを示した。全国レベルでは、気象変動シナリオにより農家所得は-23%~22%の間で変動している。これらのインパクトを地域別にみると作付け作物などの違いを反映して、-67%~200%の範囲となるようである。最も大きな影響が出るのは、北部乾燥地帯と、南東乾燥地帯である。逆に、中部湿潤地帯では、降水量が増加するため、所得が増える可能性が高いという結果を得ている。

Ricardian アプローチを使った Seo et al. (2005)、Kurukulasuriya and Ajwad (2007) は気候変化が農業所得に及ぼす影響を推計するものであり、個々の農産物の生産量に及ぼす影響について検討したものではなかった。では、気候変化が個々の農産物生産量に及ぼす影響はどうであろうか。Wijeratne et al. (2007) は、茶の生産性への影響を評価している。茶の生産にとっての最適気温は22度であること、月間降水量が100mm減少すると1ha当たりの茶葉生産が30kg~80kg減少することを明らかにしている。作物モデルによる予測でも、湿潤地帯(Wet zone Up country)を除き、気温上昇と降水量減少により収量が減少することが確認されている。さらに、標高の高い地域では茶の収量が増加する一方で、標高の低い地域では、収量が減少すると予測されている。気温の変化が標高の影響を大きく受けることを考慮すると、不思議な結果ではない。茶の輸出によってスリランカは外貨の多くを稼いでいることを斟酌すると、スリランカ経済に及ぼすインパクトは無視できるものではない。

Peiris et al. (2008) はココナッツの統合型の作物収量モデルを援用し、2040年以降のココナッツ生産は国内消費を満たすに十分ではないことを示している。また、気温の上昇によりココナッツの病害虫が発生しやすくなるので、害虫駆除に関する投資を増やす必要があると警告している。Fernando et al. (2007) は、乾期の期間の拡大と雨期の日射量不足によりココナッツ収量が減少することで、年間3200万ドルから7300万ドルの損失が発生しうると推計している。ココナッツ産業のステークホルダーのなかでは、ココナッツオイル産業が最も気候変化の影響を受けやすいという。

Maruyama (2010) は稲作を対象に、気候変化は収量だけでなく品質に関しても影響を及ぼすことを明らかにし、稲作が気候変化に関して最も脆弱な部門のひとつであることを指摘している。スリランカ政府の気象変動事務局の推計によると、旱魃の頻発による灌漑脆弱性が島中に広がるという(Climatic Change Secretariat 2010)。スリランカの稲作はその大部分が天水に依存しているため、特に乾燥地帯では、灌漑に対する脆弱性が最も深刻な脅威となる。

気候変化のインパクト評価には気温や降水量が用いられているが、二酸化炭素濃度の増加は光合成スピードを増加させ葉緑素含有量を高めることに鑑み、二酸化炭素の濃度上昇に伴う影響を分析している研究もある。二酸化炭素の濃度上昇に伴う収量増大効果は施肥効果と呼ばれている。一方で、気温が穀物収量に及ぼす効果は逆U字型であることがわかっており、収量を最大化する気温は最適気温と呼ばれている。最適気温は穀物によって異なっており、最適気温以下の範囲では平均気温の上昇は収量を引き上げ、最適気温以上の範囲では平均気温の上昇は収量を減少さ



せる。

Weerakoon et al. (2008) はスリランカの稲作においては、気温が上昇して 31 ～ 32 度を超えると稲穂不稔が増加することを確認している。また、高温半湿潤な環境の下では、気候変化により花粉不稔性がどこでも生じうることを示唆している。また、気候変化の影響はセイロン島の東北部や東部の乾燥地帯でかなりの影響が出ることを示唆している。スリランカの稲作は天水に依存しており、これらの地域では既に農業用水の不足を経験している地域が含まれている。

以上をまとめると、スリランカにおいては、気候変化により将来気温が上昇すること（2.6 度から 2.9 度）、年平均降水量が減少し灌漑用水が不足するであろうこと、その結果稲の収量は減少するであろうことが分かる。茶に関しては、標高により生産への影響が異なることも分かった。また、収量へのインパクトは作物モデルによる評価や圃場実験データに基づくものが多く、スリランカの収量関数を推計した研究成果は見つからなかった。

## 2.2 気候変化が収量に及ぼす影響

気候変化が農作物の生産に及ぼす要因には気温、降水量、二酸化炭素濃度などがあり、収量や品質の変化、作付面積を通して生産へのインパクトが生ずる。気候変化に関する多くの研究が注目しているように、収量へのインパクトに焦点をあてて、スリランカの稲作に及ぼす影響について考察する。

Furuya and Koyama (2005) は、主な世界各国のコメ、小麦、トウモロコシ、大豆のマクロの収量関数を推計している。計測式は、収量の対数を線形のタイムトレンド、気温と降水量の対数で説明するものである。残念ながら、我々が研究対象とするスリランカの収量関数は推計されていない<sup>6</sup>が、近隣諸国のコメの収量関数を示すと次の表 1 の通りである。

インドを除き、気候変化の係数は有意ではない。圃場での実験結果ではインパクトがあるにも拘わらず、マクロのデータで有意な結果が得られないのは、気温の分散が小さいことに加え、データの精度の問題などの原因が考えられる。ここでは、スリランカに近いインドの計測結果に従って、コメの収量への影響を見ておく。2015 年のコメの収量は 395kg/ha、9 月の平均気温は 27.9 度である。気候変化により将来の平均気温は 2.5 度から 2.9 度上昇すると見込まれるので気温の変化は 8.96% ～ 10.4% の上昇となる。これに、インドの収量の 9 月平均気温弾力性 -1.994 を乗ざると、-17.9% から -20.7% の収量減少となる。また、MENR (2000) によると、0.5 度の気温上昇により 6 % の収量減少が見込まれるという報告があるので、30% から 35% の収量減少が

6 我々が行った稲作の収量関数の推計結果は下記の通りである：

$$\ln yield = \frac{3.9976}{(3.800)} + \frac{0.01426}{(0.001)} trend + \frac{0.1118}{(0.049)} fertilizer + \frac{0.9685}{(1.136)} \ln temp_{OCT} - \frac{0.0267}{(0.0311)} \ln prec_{NOV}$$

No. obs = 55, Adj-R<sup>2</sup> = 0.902。但し、括弧内は標準誤差。気候変化を表す変数は有意ではない。4-parameter logistic 型の収量関数なども試したが、サーベイ結果をサポートするような収量関数を得ることは出来なかった。理由はふたつ考えられる。第一は、全国レベルのデータは地域ごとのばらつきを相殺してしまうこと、第二は気候変化を表すデータの分散が小さすぎることである。地域別のデータを用いると有意な結果が得られる可能性が大きい。

表1 コメの収量関数の推計結果

	Trend	降水量	気温	Adj.-R <sup>2</sup>	d.w.	Est	Period
インド	0.02	0.04	-1.99	0.47	1.92	AR2	62-00
	3.57	0.59	-2.35				
パキスタン	0.02	-0.01	0.32	0.00	1.97	OLS	62-94
	1.41	-0.57	0.93				
バングラデッシュ	0.02	0.06	0.19	0.29	1.87	AR1	62-90
	2.33	1.23	0.27				
インドネシア	0.03	-0.04	-0.10	-0.05	1.80	OLS	62-90
	3.93	-0.80	-0.25				
タイ	0.01	0.10	0.24	0.35	1.92	AR2	62-00
	2.10	1.42	0.22				
マレーシア	0.01	0.00	-0.33	-0.03	2.09	OLS	62-00
	1.08	-0.17	-0.92				

出所：Furuya and Koyama (2005)

上段は推計値、下段はt値である。また、Estは推計方法を示す。

予想される。さらに、Seo et al. (2005) の Ricardian アプローチでの地域別影響の表地域別 (Table 2 in p.586 及び Table 6 in p.589) を見ると、Kilinochchi 地区の農業所得は稲作のみから構成されており、当該地区での気候変化による農業所得へのインパクトは-17%である。データは2015年ではないが、2012年の1 ha 当たりの年平均コメ生産費を見ると、収入が143,603 rupee、費用が56,005 rupee である。収入 / 農業所得は1.64、費用 / 農業所得は0.64 となる。ベンチマーク年次の農業所得が336 million rupee なので、生産費から得られる比率を使って推計 (guesstimate) すると、収入は551 million rupee、費用は215 million rupee となる。気候変化により費用構造及び作付面積が不変であるとする、収入減少は57.1 million rupee となる。米価が変化しないとすれば、収量減少は10.4%となる。

気候変化が収量に及ぼす影響を推計 (guesstimate) すると減少割合のばらつきが大きいので、次節以降での影響分析では、気候変化によりコメの収量が10%、20%、30%減少する場合についてシナリオ分析する。

### 3. 稲作の収量減少がスリランカ経済に及ぼす影響

本節では、稲作の収量が減少する場合の影響について、応用一般均衡モデルを用いて評価する。

#### 3.1 データとモデルの構造

応用一般均衡分析を行うためには、ベンチマークデータとして各経済主体の収入・支出や財・サービスを始め生産要素の需給を包括的に表す社会会計表<sup>7</sup>が必要である。本研究では、GTAP<sup>8</sup>

<sup>7</sup> 社会会計表の構造については、例えば齋藤 (2012) を参照のこと。

<sup>8</sup> <https://www.gtap.agecon.purdue.edu/databases/default.asp>



データ Version 9（対象国は 140 国・地域、対象部門は 57 部門）を用いた。GTAP データを、13 部門（コメ、その他穀物、野菜・果実、茶を含むその他作物、畜産・酪農、林業・漁業・鉱業、加工食品、繊維・衣類、軽工業、重工業、建設・公益、運輸・通信、公務・サービス）、3 生産要素（労働、土地、資本）に集計した後、スリランカのデータを抽出した。ベンチマーク年次は 2011 年である<sup>9</sup>。

生産活動を表す生産関数は、労働、土地、資本の間の代替の弾力性を一定<sup>10</sup>とする CES 型付加価値関数として集計される付加価値部門と中間投入財が生産量に比例する Leontief 型とした。このような定式化は応用一般均衡分析では一般的なものである。各生産者はこのような規模に関して収穫一定の生産技術を前提とし、与えられた価格と与件として利潤を最大化するように生産物 1 単位当たりの生産要素や原材料の投入量を決定する。規模に関して収穫一定の生産関数を前提としているので生産活動に超過利潤は発生しない。実際の経済活動では営業余剰が発生しているが、データベース上ではこの余剰は本源的生産要素に分配されている。土地及び資本は特殊生産要素、労働は一般生産要素と仮定する。

家計部門は労働、資本、土地を所有し、それを生産活動へ供給することで要素所得を稼得する。生産要素供給は非弾力的であると仮定する。消費量は予算制約条件の下での効用最大化問題の解として決定する。効用関数は Klein-Rubin 型として定式化した。最も簡単な効用関数は Cobb-Douglas 型効用関数であるが、相似拡大的であり、食料品を含み各財の需要の所得弾力性がすべて 1 となり現実的ではない<sup>11</sup>。この点を解決する最も簡単な定式化が Klein-Rubin 型であり、需要関数はよく知られた線型支出体型となる。かつては需要の実証分析で、Rotterdam モデルや AIDS モデルと並びよく利用されてきた関数型でもある。Cobb-Douglas 型の効用関数であれば、基準年次の財・サービスの支出シェアがわかれば効用関数がカリブレートできるが、Klein-Rubin 型の場合には、各財の基礎消費をもカリブレートする必要があるため、支出と支出から基礎消費への支出分を控除したものの比率（に負号をつけたもの）で定義される Frisch パラメーターの値と各財の支出弾力性が追加的に必要となる。本来であれば、スリランカの実情に合わせて Frisch パラメーターを計量経済学的手法により推計する必要があるが、簡便法により推計 (guesstimate) した値<sup>12</sup>を用いた。

9 スリランカ政府は、2016 年 12 月に 2010 年ベースの産業連関表を公表している。127 部門表であり、GTAP データよりもより詳細な部門データが得られるが、現時点で付加価値部門を労働、土地、資本に分類する基礎データが得られていないために、社会会計表を推計することは難しい。

10 多段階 CES 型集計関数を前提とするため、それぞれの段階の集計関数内では任意の 2 要素間の代替の弾力性がすべて等しくなってしまうという点で若干条件の強い生産構造を仮定している点には注意する必要がある。

11 ホモセティック効用関数の問題については、例えば齋藤・齋藤 (2004) を参照のこと。

12 Sadoulet and de Janvry (1995) で紹介されている推計を利用して Frisch パラメーターを推計した。

### 3.2 シミュレーション結果

短期の分析では農地と資本を、長期の分析では農地を特殊生産要素と仮定した。長期的には作物間での農地利用も流動的になる可能性が大きいが、暫定的に農地は作物間でも移動が不可能であると仮定する。長期的インパクトと短期的インパクトの違いは、ル・シャトリエの法則により説明することができる。即ち、資源配分の制約のより大きい短期の方がインパクトは大きく、制約が少なくなるにつれてインパクトは小さくなる。本節では、短期的なインパクトを中心に説明する。

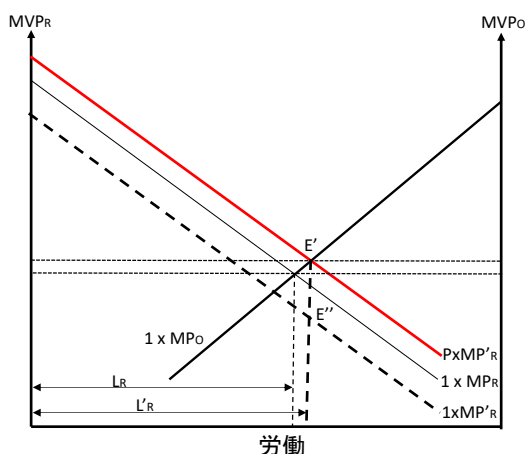


図2 コメ収量減少の影響  
出所：著者作成

図2は、気候変化がコメ及びコメ以外の生産に及ぼす短期的影響を模式的に表した図である。コメ部門への労働投入を横軸の左から、コメ以外の生産に投入される労働を横軸の右側から測ることにする。縦軸は、それぞれの産業の限界価値生産性を表す。気候変化でコメの収量が減少すると、コメの価格が一定という条件の下では限界価値生産性が低下するため、コメの限界価値生産性曲線は  $1 \times MP_R$  から  $1 \times MP'_R$  へ下方シフトする。コメ部門での生産性低下に応じて、労働はコメ部門からコメ以外の部門に移動し、コメの生産量は減少する。コメは必需品であり、需要の価格弾力性が小さいので、生産及び供給の減少は市場価格の上昇を促す。一般的に、限界価値生産力曲線がどの程度シフトするかは弾力性の値に依存するが、シミュレーション結果を先取りして図では最終的な限界価値生産性曲線が、もとの曲線よりも右側にシフトするように描いている。名目賃金は上昇するが、コメ部門の実質賃金は下落し、コメ以外の実質賃金は上昇する<sup>13</sup>。短期的には、労働以外の生産要素は産業に固定されているため、コメ部門のレンタルは上昇し、コメ以外のレンタルは減少する。表2は生産要素報酬の変化をまとめたものであるが、コメの収量が10%減少することで、短期的には名目賃金が0.9%上昇すること、固定的生産要素である地

13 コメ以外の財の価格はそれほど変化しないため、図では一定と仮定している。

代は3%上昇すること、資本の収益率は0.4%上昇することがわかる<sup>14</sup>。長期的には、資本も産業間を自由に移動するため、産業間の資本の収益率の低い部門から高い部門へと移動することになる。

表2 要素価格の変化率 (単位：%)

	基準値	短期			長期		
		収量減少率 (%)			収量減少率 (%)		
		10%	20%	30%	10%	20%	30%
資本	1.000	0.385	0.770	1.155	0.070	0.130	0.200
労働	1.000	0.868	1.736	2.604	0.080	0.170	0.250
農地	1.000	3.035	6.070	9.106	2.660	5.330	7.990

出所：著者によるシミュレーション結果

本稿のモデルでは、家計部門数を1としているが、現実には要素賦存の異なる家計が数多く存在しており、生産要素の保有量に応じて名目所得の増加額が異なる。土地を所有しない階級は名目所得の増加額が相対的に小さくなる筈である。一方で、生産物価格の変化は表3に、消費者価格の変化は表4にまとめたとおりである。これらの表を比較すると、価格の動きが微妙に異なる。これは生産財と消費財の間で、財ごとの国産・輸入比率が異なっているためである。需要の価格弾力性が小さいために、コメの消費者価格が大幅に上昇し、家計支出を圧迫する。消費量の変化は表5にまとめた。上でも述べたように、需要の価格弾力性は小さいので、価格は大幅に上昇す

表3 生産財価格の変化率 (単位：%)

	基準値	短期			長期		
		収量減少率 (%)			収量減少率 (%)		
		10%	20%	30%	10%	20%	30%
01 稲作	1.000	13.59	27.17	40.76	9.83	19.65	29.48
02 その他の穀物	1.000	0.12	0.23	0.35	0.00	0.00	0.00
03 野菜・果実	1.000	0.25	0.51	0.76	0.00	-0.01	-0.01
04 その他の作物	1.000	0.05	0.10	0.15	-0.02	-0.04	-0.06
05 畜産・酪農	1.000	0.37	0.75	1.12	0.03	0.07	0.10
06 林業・漁業・鉱業	1.000	0.08	0.16	0.24	0.02	0.03	0.05
07 加工食品	1.000	0.20	0.39	0.58	0.15	0.30	0.45
08 繊維・衣類	1.000	0.09	0.18	0.27	0.05	0.10	0.15
09 軽工業	1.000	0.20	0.41	0.61	0.04	0.08	0.12
10 重工業	1.000	0.08	0.17	0.25	0.03	0.05	0.08
11 建設・公益	1.000	0.56	1.11	1.67	0.07	0.14	0.20
12 運輸・通信	1.000	0.55	1.10	1.65	0.11	0.22	0.33
13 公務・サービス	1.000	0.78	1.55	2.33	0.16	0.32	0.48

出所：著者によるシミュレーション結果

14 土地および資本は固定的生産要素であるため、モデルの中ではそれぞれの生産部門ごとにシャドウ・プライスが計算される。表に示した要素報酬の変化率は生産部門の平均である。

るものの、消費量がそれほど大きく減少するわけではない。GDPの変化は表6にまとめた。名目GDPは増加するものの、実質GDPは収量の減少（「技術退化」）に対応して減少していることを確認することができる。

表4 消費財価格の変化率

(単位：％)

Consumption Price	基準値	短期			長期		
		収量減少率（％）			収量減少率（％）		
		10%	20%	30%	10%	20%	30%
01 稲作	1.000	13.37	26.75	40.12	9.67	19.34	29.02
02 その他の穀物	1.000	0.07	0.14	0.21	0.00	0.00	0.00
03 野菜・果実	1.000	0.22	0.44	0.67	0.00	-0.01	-0.01
04 その他の作物	1.000	0.05	0.10	0.14	-0.02	-0.04	-0.06
05 畜産・酪農	1.000	0.36	0.72	1.08	0.03	0.06	0.10
06 林業・漁業・鉱業	1.000	0.08	0.16	0.24	0.02	0.03	0.05
07 加工食品	1.000	0.17	0.33	0.50	0.13	0.26	0.38
08 繊維・衣類	1.000	0.08	0.15	0.23	0.04	0.09	0.13
09 軽工業	1.000	0.11	0.22	0.33	0.02	0.04	0.07
10 重工業	1.000	0.03	0.06	0.09	0.01	0.02	0.03
11 建設・公益	1.000	0.55	1.11	1.66	0.07	0.14	0.20
12 運輸・通信	1.000	0.51	1.01	1.52	0.10	0.20	0.30
13 公務・サービス	1.000	0.65	1.30	1.95	0.13	0.27	0.40

出所：著者によるシミュレーション結果

表5 消費量の変化率

(単位：％)

	基準値	短期			長期		
		収量減少率（％）			収量減少率（％）		
		10%	20%	30%	10%	20%	30%
01 稲作	1801.5	-1.75	-3.49	-5.24	-1.32	-2.64	-3.96
02 その他の穀物	34.8	0.08	0.15	0.23	0.01	0.01	0.02
03 野菜・果実	3930.9	0.06	0.11	0.17	0.01	0.01	0.02
04 その他の作物	1181.3	0.08	0.16	0.24	0.01	0.02	0.03
05 畜産・酪農	886.6	0.06	0.12	0.18	0.00	0.01	0.01
06 林業・漁業・鉱業	1774.5	0.14	0.27	0.41	0.01	0.01	0.02
07 加工食品	7254.5	0.09	0.19	0.28	-0.02	-0.03	-0.05
08 繊維・衣類	2172.2	0.12	0.25	0.37	0.00	0.00	0.00
09 軽工業	1549.6	0.17	0.34	0.50	0.01	0.01	0.02
10 重工業	3474.5	0.20	0.40	0.59	0.01	0.02	0.03
11 建設・公益	1189.7	0.03	0.05	0.08	-0.01	-0.02	-0.03
12 運輸・通信	13189.2	0.05	0.10	0.15	-0.02	-0.04	-0.07
13 公務・サービス	4972.5	-0.01	-0.02	-0.02	-0.04	-0.07	-0.11

出所：著者によるシミュレーション結果

表6 GDP の変化率

(単位: million USD, %)

	基準値 (million USD)	短期			長期		
		収量減少率 (%)			収量減少率 (%)		
		10%	20%	30%	10%	20%	30%
名目 GDP	59,178	0.69	1.38	2.07	0.29	0.58	0.87
GDP デフレーター	1.000	0.92	1.85	2.77	0.42	0.85	1.27
実質 GDP	59,178	-0.23	-0.47	-0.70	-0.13	-0.27	-0.40

出所：著者によるシミュレーション結果

長期的な影響については、ル・シャトリエの原理に矛盾しない結果となっている。短期的な資本収益率への影響と長期的な資本投入変化は表7にまとめたとおりである。短期的な資本収益率は、コメ以外では酪農・畜産、建設業及び公益、運輸・通信、公務・サービス業で上昇するが、コメ部門への影響が極端に大きい。これを反映してか、長期的な資本投入はコメ部門のみ増加するという結論が得られた。現実的には、経済発展につれて製造業部門などでの生産性向上が牽引役となって、コメ以外の部門での資本投入も増加することになると思われる。

表7 短期の資本報酬と長期の資本投入の変化率

(単位: million USD, %)

Rental Price of Capital	基準値	短期			基準値 (million USD)	長期		
		収量減少率（％）				収量減少率（％）		
		10%	20%	30%		10%	20%	30%
01 稲作	1.000	11.22	22.44	33.66	440.4	3.74	7.47	11.21
02 その他の穀物	1.000	-0.53	-1.07	-1.60	3.4	-0.06	-0.13	-0.19
03 野菜・果実	1.000	-0.10	-0.20	-0.30	621.6	-0.05	-0.10	-0.14
04 その他の作物	1.000	-0.49	-0.99	-1.48	659.5	-0.06	-0.12	-0.18
05 畜産・酪農	1.000	0.22	0.45	0.67	408.5	-0.10	-0.21	-0.31
06 林業・漁業・鉱業	1.000	-0.23	-0.47	-0.70	1375.3	-0.06	-0.11	-0.17
07 加工食品	1.000	-0.20	-0.39	-0.59	3430.8	-0.17	-0.33	-0.50
08 繊維・衣類	1.000	-0.40	-0.79	-1.19	1990.7	-0.26	-0.53	-0.79
09 軽工業	1.000	-0.08	-0.16	-0.23	681.2	-0.13	-0.26	-0.39
10 重工業	1.000	-0.21	-0.42	-0.63	2014.3	-0.12	-0.24	-0.36
11 建設・建設・公益	1.000	0.77	1.55	2.32	2101.8	-0.05	-0.09	-0.14
12 運輸・通信	1.000	0.47	0.95	1.42	10217.2	-0.08	-0.16	-0.24
13 公務・サービス	1.000	0.71	1.42	2.14	1138.8	-0.08	-0.15	-0.23

出所：著者によるシミュレーション結果

表8は、地代の変化をまとめたものである。短期と長期の違いは資本が部門間を移動するか否かであるが、資本移動を前提とするとコメ部門の地代上昇率が減少する。例えば、収量が30%減少すると、稲作部門での地代上昇率は68%から58%へと約10%減少する。

さて、気候変化による農業生産の減少が貧困に及ぼす影響について吟味する前に、フード・セキュリティの基本方程式を振り返っておく。これは、一般的な予算制約を食料に限定して考えた

表8 地代の変化率

(単位：％)

	基準値	短期			長期		
		収量減少率（％）			収量減少率（％）		
		10%	20%	30%	10%	20%	30%
01 稲作	1.000	22.53	45.06	67.60	19.34	38.68	58.02
02 その他の穀物	1.000	-0.53	-1.07	-1.60	-0.17	-0.34	-0.52
03 野菜・果実	1.000	-0.10	-0.20	-0.30	-0.12	-0.23	-0.35
04 その他の作物	1.000	-0.49	-0.99	-1.48	-0.16	-0.32	-0.49
05 畜産・酪農	1.000	0.22	0.45	0.67	-0.13	-0.27	-0.40
06 林業・漁業・鉱業	1.000	-0.23	-0.47	-0.70	-0.21	-0.42	-0.63

出所：著者によるシミュレーション結果

ものである。所得水準の高い先進国では、エンゲル係数が小さく、支出額の大部分は食料品以外へ支出するため、一般的な予算制約式を食料に限定することはできないが、所得水準の低い発展途上国のなかでも、とりわけ貧困層を対象にする場合には有効であると思われる。

基本方程式は以下のように書かれる：

$$(\text{食料必要量} - \text{食料生産量}) \times \text{食料価格} \leq \text{所得} + \text{食料購入に利用可能な流動資産}$$

$$\text{食料必要量} = \text{ひとりあたり必要量} \times \text{世帯員数}$$

$$\text{所得} = \text{賃金} \times \text{労働保有量} + \text{地代} \times \text{農地保有量} + \text{資本レンタル価格} \times \text{資本保有量}$$

この式を見ると、土地を持たない貧困家計では、自給用の食料生産ができず、食料必要量をすべて購入しなければならないばかりか、所得の源泉も労働のみとなる<sup>15</sup>ので、食料価格上昇の影響を大きく受けることが分かる。一方で、農地保有量の多い農家は、その保有水準によっては、必要な食料のすべてを自給でまかなえるばかりか、所得も土地なし労働者に比べて大幅に増加するため、食料品の価格上昇は所得の大幅な増加に繋がり、貧しい家計はより貧しく、豊かな家計はより豊かになるとと思われる。

次に検討すべき課題は、シミュレーション結果と家計調査の個票を用いて上記の仮説を検証することである。家計調査の個票の一部は既に入手済みであるが、所得の源泉（労働、土地、資本保有）と家計のコメ生産量に関するデータが得られていないため仮説の検討を行うことは現段階では不可能であるので今後の課題となる。

因みに、現時点で入手済みの家計調査の個票（支出）データを使って、コメの支出の水準についてみておく。図3は Household Income and Expenditure Survey 2012/2013 の個票を使って作成したひとり1ヶ月あたりの所得とひとりあたり支出額をプロットしたものである。スリランカルピーの為替レートが0.6円/ルピー程度なので、10,000ルピーは6,000円程度に相当する。

15 貧困世帯の資本保有は少ないと仮定してこれを無視した。



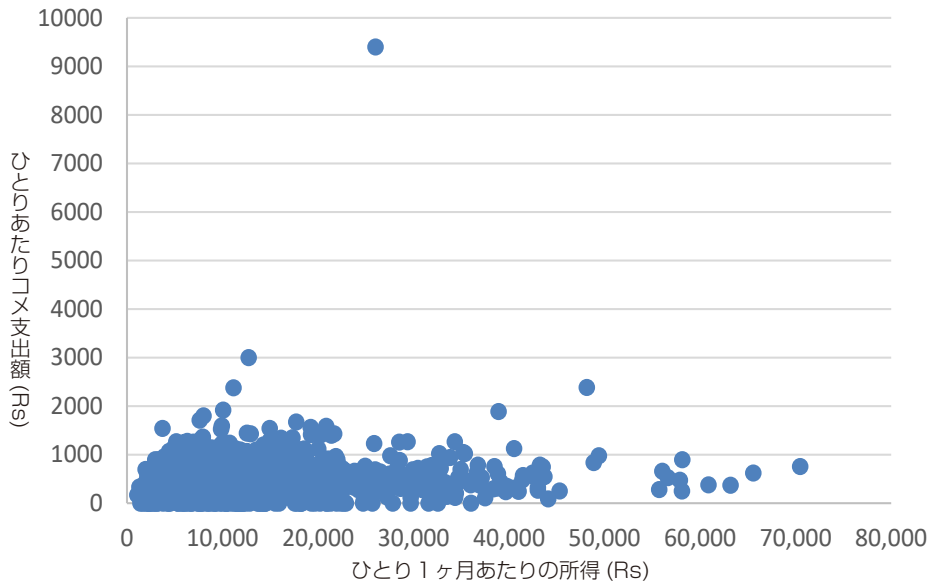


図3 所得とコメ支出額

出所：Household Income and Expenditure Survey 2012/2013 より作成

外れ値が含まれているが、ひとりあたりの支出額はほぼ900ルピー以下<sup>16</sup>である。シミュレーション結果によると収量が30%減少する場合の消費者米価上昇率は40.12%、消費量の減少率は5.24%なので、支出額は約35%上昇する。家計所得の少ない貧困世帯ではコメ支出割合が高く貧困に及ぼす影響も大きくなると予想される。

## 5. まとめ

本研究では、スリランカを対象にして気候変化が農業生産、一国のマクロ経済に及ぼす影響と、貧困層への含意について応用一般均衡モデル及び家計調査の個票データを用いて検討した。気候変化がコメの生産性に及ぼす影響については、圃場実験データをはじめいくつかの研究が存在するが、マクロの収量関数を推計してみると、気候変化を表現する気温や降水量のデータは収量変動には有意に効いてくるという結論は導き出せなかった。これは、我々の研究ばかりではなく、他の研究でも同様の傾向が観察される。地域レベルの気温や降水量データを用いて、再度収量関数を推計してみる必要がある。また、応用一般均衡モデルによる分析結果は、フード・セキュリティの基本方程式を介して検討すると、「価格上昇により貧しい家計はより貧しく、裕福な家計はより裕福になる」という洞察が得られたが、これを家計調査の個票で確認する際に、データに不備があったため、統計的に確認することは現段階ではできていない。この点については、今後の課題としたい。

16 ひとり1ヶ月あたりのコメ支出額が900ルピー以下のサンプル数は2976で全サンプル数3108の95.8%である。

付表 モデルで使したキー・パラメータ

生産財(部門)	代替の弾力性		支出弾力性	価格弾力性
	付加価値	国産・輸入	家計需要	輸出
01 稲作	0.47	3.8	0.46	-5.7
02 その他の穀物	0.26	2.6	0.46	-5.7
03 野菜・果実	0.26	2.0	0.46	-4.2
04 その他の作物	0.26	3.3	0.46	-6.5
05 畜産・酪農	0.52	3.1	0.77	-7.4
06 林業・漁業・鉱業	0.20	4.9	0.83	-11.3
07 加工食品	1.12	2.2	0.68	-4.5
08 繊維・衣類	1.26	3.7	0.76	-7.5
09 軽工業	1.26	3.4	1.09	-6.7
10 重工業	1.26	3.4	1.11	-7.2
11 公益	1.37	2.1	1.18	-4.6
12 運輸・通信	1.63	1.9	1.33	-3.8
13 公務・サービス	1.26	1.9	1.40	-3.8

出所：GTAP データベース、Rajesh Chadha et al. (1998), 齋藤・齋藤 (2015)。

注意：Frich パラメーターの値は、Sadoulet and de Janvry (1995) を参考に -3.4 とした。

## 参考文献

- Chandrapala, L. (1996). Long term trends of rainfall and temperature in Sri Lanka. Abrol, Y. P., et al. (Eds.), Climate Variability and Agriculture. Narosa Publishing House, New Delhi, pp. 153-162.
- Chandrapala, L. (1997). Comparison of areal precipitation of Sri Lanka on a district basis during the periods 1931-1960 and 1961-1990. Proceedings of the National Symposium on Climate Change, Colombo, Sri Lanka, 7-8 March 1997.
- Climate Change Secretariat, Ministry of Environment, Sri Lanka. (2010). Public Perceptions of Climate Change in Sri Lanka. ADB Technical Assistance Project on Strengthening Capacity for Climate Change Adaptation. www.climatechange.lk.
- De Costa, W. A. J. M., Weerakoon, W. M. W., Abeywardena, R. M. I., Herath, H. M. L. K. (2003). Response of Photosynthesis and Water Relations of Rice (*Oryza sativa*) to Elevated Atmospheric Carbon Dioxide in the Subhumid Zone of Sri Lanka. *Journal of Agronomy and Crop Science*, 189(2): 71-82.
- De Costa, W. A. J. M., Weerakoon, W. M. W., Herath, H. M. L. K., Amaratunga, K.S.P., Abeywardena, R. M. I. (2006). Physiology of yield determination of rice under elevated carbon dioxide at high temperatures in a sub humid tropical climate. *Field Crops Research*. 96(2-3):336-347.
- Domroes, M. (1996). Rainfall variability over Sri Lanka. Abrol, Y. P., Sulochana, G., Pant, G. B. (Eds.), Climate Variability and Agriculture. Narosa Publishing House, New Delhi, pp. 163-179.
- Domroes, M. and Schaefer, D. (2000). Trends of recent temperature and rainfall changes in Sri Lanka. Proceedings of the International Conference on Climate Change and Variability. pp. 197-202.
- Droogers, P. (2004). Adaptation to climate change to enhance food security and preserve environmental quality: example for Southern Sri Lanka. *Agriculture Water Manage.* 66, 15-33.
- Eriyagama, N., Smakhtin, V. (2009). How prepared are water and agricultural sectors in Sri Lanka for climate change? : a review. Paper presented at the Water for Food Conference: national conference addressing water management issues, food security, environment and climate change in Sri Lanka, Colombo, Sri Lanka, 9-11 June 2009.



- Fernando, MTN, L Zubair, TSG Peiris, CS Ranasinghe and J Ratnasiri. (2007) Economic value of climate variability impacts on coconut production in Sri Lanka, AIACC working paper No. 45.
- Fernando, T. K. and L Chandrapala. (1992). Global warming and rainfall variability: the Sri Lankan situation. Proceedings of the 5th International Meeting on Statistical Climatology, Toronto, Canada.
- Furuya and Koyama (2005) Impact of Climate Change on World Agricultural Product Market: Estimation of Macro Yield Function, *Journal of Agricultural Research Quarterly* 39(2), 2005, 121-134.
- Furuya et al. (2015) Climate Change Effects on Long Term World Crop Production: Incorporating a Crop Model into Long-term Yield Estimates, *Japan Agricultural Research Quarterly* 49(2), 2015, 187-202.
- GEMPACK, General Equilibrium Modelling Package, <http://www.copsmodels.com/gempack.htm>
- Kurukulasuriya, P., and M. I. Ajwad. (2007). Application of the Ricardian technique to estimate the impact of climate change on smallholder farming in Sri Lanka. *Climate Change*, 81:39-59.
- Madduma Bandara C. M. and Wickramagamage, P. (2004). Climate change and its impact on upper watershed of the hill country of Sri Lanka. Climate Change Secretariat Working Paper. Environmental Economics and Global Affairs Division, Ministry of Environment and Natural Resources, Battaramulla, Sri Lanka.
- Maruyama, A. (2010). Out-crossing of Heat Stress Affected Spikelets of Lowland Rice in the Sub-humid Zone of Sri Lanka and Its Long-term Implications. [www.niaes.affrc.go.jp/marco](http://www.niaes.affrc.go.jp/marco).
- Mendelsohn, R., A. Dinar and A. Sanghi. (2001) The effect of development on the climate sensitivity of agriculture, *Environment and Development Economics* 6 : 85-101.
- MENR (Ministry of Environment and Natural Resources). (2000). Initial national communication under the United Nations Framework Convention on Climate Change: Sri Lanka. Colombo: MENR, Government of Sri Lanka.
- Peiris, T. S. G., Hansen, J. W., Zubzir, L. (2008). Use of seasonal climate information to predict coconut production in Sri Lanka. *International Journal of Climatology*, 28(1): 103-110.
- Peiris, T. S. G., Thattil, R. O., Mahindapala, R. (1995). An analysis of the effect of climate and weather on coconut (cocos nucifera). *Experimental Agriculture*, 31: 451-460.
- Rajesh Chadha, Sanjib Pohit, Alan V. Deadorff and Robert M. Stern. (1998) The Impact of Trade and Domestic Policy Reforms in India: A CGE Modeling Approach, University of Michigan Press.
- Sadoulet, E. and de Janvry, A. (1995) Quantitative Development Policy Analysis. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Seo, S. N., Mendelsohn, R. and Munasinghe, M. (2005). Climate change and agriculture in Sri Lanka: a Ricardian valuation. *Environment and Development Economics*, 10: 581-596.
- Silva, C. S. D., Weatherhead, E. K. Knox, J. W. and Rodriguez-Diaz, J. A. (2007). Predicting the impacts of climate change — A case study of paddy irrigation water requirements in Sri Lanka, *Agricultural water management*, 93:19-29.
- Weerakoon, W. M. W., Maruyama, A. & Ohba, K. (2008). Impact of humidity on temperature induced grain sterility, in rice (*Oryza sativa* L). *Journal of Agronomy and Crop Science*, 194, 135-140.
- Wijeratne, M. A., Anandacoomaraswamy, A., and Ratnasiri, J. (2007). Assessment of impact of climate change on productivity of tea (*Camellia sinensis* L.) plantations in Sri Lanka. *J. Natn. Sci, Foundation Sri Lanka*, 35(2): 119-126.
- 齋藤勝宏「ラオスの社会会計表の推計と資源利用に基づく経済発展の可能性」産業連関第20巻1号、2012年。
- 齋藤之美・齋藤勝宏「嗜好と比較優位」創価経済論集、第34巻3・4号、2004年、49-60。
- 齋藤之美・齋藤勝宏・パウデルダマル「ネパールにおける土地改革に関するシミュレーション分析」創価経済論集、第44巻、2015年、33-44。



# Asymptotic Theory for Robust Autocorrelation Test under Stochastic Volatility\*

Manabu ASAI\*\*

**Abstract:** Wooldridge (1991) suggest a robust test for autocorrelations of the disturbances of regression models, under misspecified conditional heteroskedastic model. Although stochastic volatility (SV) models allow unconditional time-varying variance, the Monte Carlo results of Asai (2000) indicate that the test of Wooldridge (1991) is robust under the SV process. This paper shows that the test statistic has asymptotic  $\chi^2$  distribution under the null hypothesis of no serial correlation, even when the underlying process has stochastic volatility.

**Keywords:** Asymptotic theory; Autocorrelation; Misspecification; Robust Test; Stochastic Volatility.

**JEL Classification:** C12, C22.

## 1 Introduction

Wooldridge (1990, 1991) developed a general framework for robust, regression-based diagnostics to models with conditional means and conditional variances. As an application, Wooldridge (1991) proposed a test for autocorrelations of the disturbances of regression models, which is robust to the misspecification of conditional heteroskedastic models. Monte Carlo experiments of Asai (2000) show that the robust autocorrelation test of Wooldridge (1991) has satisfactory size and power in finite sample. The purpose of this paper is to give a formal proof for the asymptotic property of the test statistic.

The organization of this paper is as follows, Section 2 introduce the testing procedure in the presence of stochastic volatility. Section 3 shows that the robust test follows the  $\chi^2$  distribution under the null of no serial correlation, and Section 4 gives some concluding remarks.

The matrix (Euclidean) norm of the matrix, or vector  $A$ , is dened as  $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A'A)}$ . We denote a strictly positive constant by  $K$ .

## 2 Stochastic Volatility Model and Robust Autocorrelation Test

Consider the regression model with autoregressive disturbance:

---

\* The author is most grateful to Yoshi Baba for very helpful comments and suggestions.

\*\* Faculty of Economics, Soka University

$$y_t = x_t \beta + u_t, \quad (1)$$

$$u_t = \gamma_1 u_{t-1} + \cdots + \gamma_p u_{t-p} + e_t \quad (t = 1, 2, \dots, T), \quad (2)$$

where  $y_t$  is a dependent variable,  $x_t$  is a  $1 \times k$  vector of variables which may include exogenous variables and predetermined variables,  $\beta$  is a  $k \times 1$  vector of parameters,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)'$  is a  $p \times 1$  vector of parameters, and  $e_t$  follows a stochastic volatility (SV) process:

$$e_t = z_t \exp(\alpha_t/2) \quad (3)$$

$$\alpha_{t+1} = \omega + \phi \alpha_t + \eta_t, \quad (4)$$

with  $z_t \sim iid(0,1)$  and  $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ .

We assume  $|\phi| < 1$  for the strict and covariance stationarity of  $\alpha_t$ . By the denitions (3) and (4), Theorem 3.5.8 of Stout (1974) shows that  $e_t$  is strict stationary and ergodic. The structure 21 of the SV model (3) and (4) and property of the log-normal distribution indicate:

$$E(e_t) = 0, \quad V(e_t) = \sigma_e^2, \quad E(e_t e_s) = 0 \text{ for } t \neq s, \quad (5)$$

where

$$\sigma_e^2 = \exp \left( \frac{\omega}{1-\phi} + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)} \right),$$

(see Andersen and Sørensen (1996) for the moments of the SV model). Hence,  $e_t$  is covariance stationary if  $|\phi| < 1$ . The autocovariance function of  $e_t^2$  is given by:

$$E[e_t^2 e_{t-s}^2] = \exp \left( \frac{2\omega}{1-\phi} + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2} + \frac{\phi^s \sigma_\eta^2}{1-\phi^2} \right), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

indicating the dependence of the second moment.

We assume that  $\gamma$  satisfy the stationary condition.

**Assumption 1.** The roots of the characteristic polynomial,  $1 - \gamma_1 m - \cdots - \gamma_p m^p = 0$ , are greater than one in absolute value.

**Remark 2.1.** Since  $e_t$  is strict stationary and ergodic, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) and equation (2) with Assumption 1 imply that  $u_t$  is strict stationary and ergodic. Hence  $u_t$  has an MA( $\infty$ ) representation:

$$u_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i e_{t-1}, \quad \varrho_0 = 1, \quad (7)$$

with unconditional moments,  $E(u_t) = 0$  and  $V(u_t) = \sigma_u^2$ , where  $\sigma_u^2 = \sigma_e^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varrho_i^2 < \infty$ .

For the model defined in (1)-(4), consider testing autocorrelations via the null hypothesis:

$$H_0 : \gamma_1 = \cdots = \gamma_p = 0. \quad (8)$$

For this purpose, we use the robust Lagrange multiplier (LM) test introduced by Wooldridge (1991). Following Wooldridge (1991), define the 'misspecification indicator' as:

$$\lambda_t(\beta) = (y_{t-1} - x_{t-1}\beta, \dots, y_{t-p} - x_{t-p}\beta). \quad (9)$$

Corresponding to the OLS estimate,  $\hat{\beta}$ , define  $\hat{\lambda}_t = \lambda_t(\hat{\beta}) = (\hat{u}_{t-1}, \dots, \hat{u}_{t-p})$  with the OLS

residual defined by  $\hat{u}_t = y_t - x_t' \hat{\beta}$ . Wooldridge (1991) considers a kind of standardization of the misspecification indicator using an approximated heteroskedastic model. For the underlying SV process, we use the ARCH( $q$ ) specification for the approximated heteroskedastic model. Note that the test statistic of Wooldridge (1990) is robust to the misspecification of heteroskedastic function, if the regularity conditions are satisfied.

The construction of the robust LM statistic involves the following steps:

1. Obtain the fitted values,  $\hat{h}_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) from the regression of  $\hat{u}_t^2$  on  $(1, \hat{u}_{t-1}^2, \dots, \hat{u}_{t-q}^2)$ .
2. Define  $\tilde{x}_t = \hat{h}_t^{-1/2} x_t$  and  $\tilde{u}_t = \hat{h}_t^{-1/2} \hat{u}_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ).
3. Save the  $1 \times p$  vector of residuals, say  $\tilde{r}_t$ , from the regression of each of  $\tilde{\lambda}_t$  on  $\tilde{x}_t$ , where  $\tilde{\lambda}_t = (\tilde{u}_{t-1}, \dots, \tilde{u}_{t-p})$ .
4. Compute  $T - \text{SSR}$ , where SSR is the sum of the squared residuals from the regression of 1 on  $\tilde{u}_t \tilde{r}_t$ .

In the following, we show that  $T - \text{SSR}$  has the asymptotic  $\chi^2(p)$  distribution under  $H_0$ .

### 3 Asymptotic Property

In the asymptotic analysis, we use the following notations to explain quantities used in the procedure in the previous section.

In addition to the misspecification indicator (9), define the error term  $\psi_t(\beta) = y_t - x_t' \beta$ . For the OLS estimator  $\hat{\beta} = [\sum_{t=1}^T x_t' x_t]^{-1} \sum_{t=1}^T x_t' y_t$ , the OLS residuals are given by  $\hat{u}_t = \psi_t(\hat{\beta}) = u_t - x_t'(\hat{\beta} - \beta^0)$ , where  $\beta^0$  is the vector of true parameters. For the first step in the above procedure, we formally state the approximating ARCH( $q$ ) model as:

$$h_t(\theta) = \delta_0 + \delta_1(y_{t-1} - x_{t-1}'\beta)^2 + \dots + \delta_q(y_{t-q} - x_{t-q}'\beta)^2, \quad (10)$$

where  $\theta = (\delta', \beta^0)'$  and  $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_q)'$ . The OLS estimator of  $\delta$  is obtained by:

$$\hat{\delta} = \left[ \sum_{t=1}^T \kappa_t(\hat{\beta})' \kappa_t(\hat{\beta}) \right]^{-1} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\hat{\beta})' \varphi_t(\hat{\beta}) \quad (11)$$

where

$$\kappa_t(\beta) = [1 (y_{t-1} - x_{t-1}'\beta)^2 \dots (y_{t-q} - x_{t-q}'\beta)^2], \quad \varphi_t(\beta) = (y_t - x_t'\beta)^2. \quad (12)$$

By the definition of  $h_t(\theta)$ , we can write  $\hat{h}_t$  in the first step as  $\hat{h}_t = h_t(\hat{\theta})$  with  $\hat{\theta} = (\hat{\delta}', \hat{\beta}^0)'$ .

Based on  $\tilde{x}_t$  and  $\tilde{u}_t$  in the second step, the residual in the third step is given by:

$$\tilde{r}_t = \tilde{\lambda}_t - \tilde{x}_t \left[ \sum_{t=1}^T \tilde{x}_t' \tilde{x}_t \right]^{-1} \sum_{t=1}^T \tilde{x}_t' \tilde{\lambda}_t = [h_t(\hat{\theta})]^{-1/2} [\lambda_t(\hat{\beta}) - x_t \hat{B}_T],$$

where

$$\hat{B}_T = \left[ \sum_{t=1}^T [h_t(\hat{\theta})]^{-1} x_t' x_t \right]^{-1} \sum_{t=1}^T [h_t(\hat{\theta})]^{-1} x_t' \lambda_t(\hat{\beta}). \quad (13)$$

By regressing 1 on  $\tilde{u}_t \tilde{r}_t$  in the fourth step, we obtain:

$$T - SSR = \tilde{\zeta}_T' \tilde{\Omega}_T \tilde{\zeta}_T \quad (14)$$

where

$$\tilde{\zeta}_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \tilde{u}_t \tilde{r}_t' = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\hat{\beta})}{h_t(\hat{\theta})} \left[ \lambda_t(\hat{\beta}) - x_t \hat{B}_T \right]', \quad (15)$$

$$\tilde{\Omega}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{u}_t^2 \tilde{r}_t' \tilde{r}_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \frac{\psi_t(\hat{\beta})}{h_t(\hat{\theta})} \right]^2 \left[ \lambda_t(\hat{\beta}) - x_t \hat{B}_T \right]' \left[ \lambda_t(\hat{\beta}) - x_t \hat{B}_T \right], \quad (16)$$

and SSR is the sum of the squared residuals. Note  $T - SSR = TR_u^2$ , where  $R_u^2$  is the uncentered  $r$ -squared from the regression of 1 on  $\tilde{u}_t \tilde{r}_t$ .

Corresponding to  $\theta$ , denote the parameter space as  $\Theta = \Theta_\beta \times \Theta_\delta$  where  $\Theta_\beta \subset \mathfrak{R}^k$  and  $\Theta_\delta \subset \mathfrak{R}^{q+1}$ .

We make the following assumptions.

**Assumption 2.** The vector process  $x_t$  is strict stationary and ergodic. For any  $t$  and  $s$ ,  $x_t$  and  $u_s$  are independent. For the second moments of  $x_t$  and  $u_t$ ,  $V_x = E[x_t' x_t]$  is finite and positive definite, and  $\sigma_u^2$  defined by equation (7) is finite, respectively. For the fourth moment of  $x_t$ ,  $E(|x_{it} x_{jt} x_{lt} x_{rt}|)$  is finite for all  $i, j, l$ , and  $r$  ( $i, j, l, r = 1, \dots, k$ ).

**Assumption 3.** For the approximating ARCH( $q$ ) model (10),  $\delta_0 > 0$  and  $\delta_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, q$ ). The roots of the characteristic polynomial,  $1 - \delta_1 m - \dots - \delta_q m^q = 0$ , are greater than one in absolute value.

**Remark 3.1.** The parameter vector,  $\delta$ , is determined by the property of  $u_t$  with the structure (2)-(4). The true value of  $\delta$  is given by the following assumption.

**Assumption 4.**  $\Theta$  is compact. For the vectors of the true parameters,  $\beta^o \in \Theta_\beta$  and  $\delta^o \in \Theta_\delta$ ,

where

$$\delta^o = [E[\kappa_t(\beta^o)' \kappa_t(\beta^o)]]^{-1} E[\kappa_t(\beta^o)' \varphi_t(\beta^o)].$$

**Assumption 5.** The distribution of  $z_t$  is symmetric and  $E(z_t^4) < \infty$ .

**Proposition 1.** Under Assumptions 1-5,

$$\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta^o) = O_p(1),$$

where  $\hat{\delta}$  is defined by (11).

**Proposition 2.** Under Assumptions 1-5 and  $H_0$

$$T - SSR \xrightarrow{d} \chi^2(p).$$

where  $T - SSR$  is defined in equation (14).

## 4 Conclusion

Wooldridge (1991) developed a serial correlation test which is robust to the misspecification of conditional variance. The paper shows that the test statistic suggested by Wooldridge (1991) has the asymptotic  $\chi^2$  distribution under the null hypothesis of no autocorrelation, when the underlying process follows the stochastic volatility (SV) model. The sufficient conditions for the result are

existence of the fourth order moment and the assumption of a symmetric distribution.

We can consider several extensions of the paper. Regarding the underlying process, the approach used in this paper applicable to symmetric ARCH class model and symmetric type SV models. We may also examine asymptotic properties of various tests under misspecified heteroskedastic models. These are important directions of future researches.

## References

- Andersen, T. G. and B. E. Sørensen (1996), "GMM Estimation of a Stochastic Volatility Model: A Monte Carlo Study", *Journal of Business & Economic Statistics*, **14**, 328-352.
- Asai, M. (2000), "Testing for Serial Correlation in the Presence of Stochastic Volatility", *Asia-Pacific Financial Markets*, **7**, 321-337.
- Davidson, J. (1994), *Stochastic Limit Theory: An Introduction for Econometricians*, Oxford: Oxford University Press.
- Stout, W. F. (1974), *Almost Sure Convergence*, London: Academic Press.
- White, H. (1980a), "Nonlinear Regression on Cross-Section Data", *Econometrica*, **48**, 721-746.
- White, H. (1980b), "A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity", *Econometrica*, **48**, 817-838.
- White, H. (1994), *Estimation, Inference and Specication Analysis*, New York, NY: Cambridge University Press.
- Wooldridge, J. M. (1990), "A Unied Approach to Robust, Regression-based Specication Tests", *Econometric Theory*, **6**, 17-43.
- Wooldridge, J. M. (1991), "On the Application of Robust, Regression-Based Diagnostics to Models of Conditional Means and Conditional Variances", *Journal of Econometrics*, **47**, 5-46.

## Appendix

### A.1 Proof of Proposition 1

For a matrix  $A$ ,  $\{A\}_{ij}$  denotes the  $(i, j)$ th element of  $A$ . We introduce Lemma A.1 of Wooldridge (1990) which is repeatedly used in the following proofs.

**Lemma 1.** Assume that the sequence of random functions  $\{Q_T(w_T, \theta) : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$ , where  $Q_T(w_T, \cdot)$  is continuous on  $\Theta$  and  $\Theta$  is a compact subset of  $\mathbb{R}^p$ , and the sequence of non-random functions  $\{\bar{Q}_T(\theta) : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$  satisfy the following conditions:

- (i)  $\sup_{\theta \in \Theta} |Q_T(w_T, \theta) - \bar{Q}_T(\theta)| \xrightarrow{P} 0$ ;
- (ii)  $\{Q_T(w_T, \theta) : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$  is continuous on  $\Theta$  uniformly in  $T$ . Let  $\ddot{\theta}_T$  be a sequence of random vectors such that  $\ddot{\theta}_T - \theta_T^o \xrightarrow{P} 0$  where  $\{\theta_T^o\} \subset \Theta$ .

Then  $Q_T(w_T, \ddot{\theta}_T) - \bar{Q}_T(\theta_T^o) \xrightarrow{P} 0$ .

**Proof.** See Lemma A.1 of Wooldridge (1990).  $\square$

**Lemma 2.** Under Assumptions 1 and 2,  $\hat{\beta} \xrightarrow{a.s.} \beta^o$ .

**Proof.** Noting that  $y_t = x_t \beta^o + u_t$ ,

$$\hat{\beta} = \beta^o + \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t' x_t \right]^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t' u_t.$$

Since  $x_t$  is strict stationary and ergodic, the uniform law of large numbers (ULLN) for stationary ergodic processes (see Lemma A.2.2 of White (1994)) indicates:

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it} x_{jt} - \{V_x\}_{ij} \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). By Assumption 2,  $V_x$  is positive definite, and the continuity of the matrix inverse indicates that  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t' x_t$  is nonsingular almost surely for  $T$  sufficiently large. As the elements of  $V_x^{-1}$  are uniformly bounded,

$$\left| \left\{ \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t' x_t \right)^{-1} \right\}_{ij} - \{V_x^{-1}\}_{ij} \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad (\text{A.1})$$

for all  $i$  and  $j$ . Since  $E(x_{it}^2) = \{V_x\}_{ii} < K$  and  $E(u_{it}^2) = \sigma_u^2 < K$  by Assumptions 1 and 2,

$$E|x_{it} u_{it}| \leq \sqrt{E(x_{it}^2) E(u_{it}^2)} < K,$$

by Hölder's inequality. Since  $(x_t', u_t)'$  is strict stationary and ergodic,  $x_t' u_t$  is strict stationary and ergodic. By the ULLN for stationary ergodic processes (Lemma A.2.2 of White (1994)), we obtain:

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it} u_{jt} - E(x_{it} u_{jt}) \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

Since  $V_x^{-1}$  has uniformly bounded elements, uniform continuity implies,



$$\left| \left\{ \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x'_t x_t \right]^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x'_t u_t \right\}_i - \{V_x^{-1} E(x'_t u_t)\}_i \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Since  $E(x'_t u_t) = 0$  by Assumption 2,

$$\left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x'_t x_t \right]^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x'_t u_t \xrightarrow{a.s.} 0,$$

implying that Lemma 2 holds.  $\square$

**Lemma 3.** Under Assumptions 1-4,  $\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta^o) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 V_x^{-1})$ .

**Proof.** Consider the quantity  $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T x'_t u_t$ . As  $(x'_t, u_t)'$  is strict stationary and ergodic,  $x'_t u_t$  is strict stationary ergodic. Assumptions 1 and 2 indicate that  $x'_t u_t$  is strict stationary ergodic martingale difference with  $E(u_t^2 x_t x'_t) = \sigma_u^2 V_x$ , which is finite and positive definite. By the ULLN for stationary ergodic process (Lemma A.2.2 of White (1994)),

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t^2 x_{it} x_{jt} - \sigma_u^2 \{V_x\}_{ij} \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). Since  $V_x$  is finite and positive definite by Assumptions 2, we can define the symmetric positive definite matrix,  $\sigma_u^{-1} V_x^{-1/2}$  such that  $(\sigma_u^{-1} V_x^{-1/2})^2 = \sigma_u^{-2} V_x^{-1}$ . Assumptions 2-4 imply that the elements of  $V_x^{-1/2}$  and  $\sigma_u^{-1}$  are uniformly bounded. By Lemma 3.2 of White (1980a),

$$\left| \sigma_u^{-2} \left\{ V_x^{-1/2} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t^2 x'_t x_t \right] V_x^{-1/2} \right\}_{ij} - \{I_k\}_{ij} \right| \xrightarrow{p} 0, \quad (\text{A.2})$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). Also, by Chebyshev's inequality,

$$P \left( \left| \frac{x_{it} u_t}{\sqrt{T}} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{V(x_{it} u_t)}{T \varepsilon^2} \rightarrow 0,$$

as  $T \rightarrow \infty$ . Hence,

$$\max_{1 \leq t \leq T} \left| \frac{x_{it} u_t}{\sqrt{T}} \right| \xrightarrow{p} 0. \quad (\text{A.3})$$

As equations (A.2) and (A.3) satisfy the regularity conditions for the central limit theorem (CLT) for strict stationary ergodic martingale differences (Theorem 24.3 of Davidson (1994)), we obtain:

$$\sigma_u^{-1} V_x^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T x'_t u_t \xrightarrow{d} N(0, I_k). \quad (\text{A.4})$$

Now

$$\sqrt{T} \sigma_u^{-1} V_x^{1/2} (\hat{\beta} - \beta^o) = V_x^{1/2} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x'_t x_t \right]^{-1} V_x^{1/2} \sigma_u^{-1} V_x^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T x'_t u_t.$$

By (A.1), (A.2), and Lemma 3.2 of White (1980a),

$$\left| \left\{ V_x^{1/2} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x'_t x_t \right]^{-1} V_x^{1/2} \right\}_{ij} - \{I_k\}_{ij} \right| \xrightarrow{p} 0,$$

and hence,

$$\left| \sqrt{T} \sigma_u^{-1} V_x^{1/2} (\hat{\beta} - \beta^o) - \sigma_u^{-1} V_x^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T x'_t u_t \right| \xrightarrow{p} 0. \quad (\text{A.5})$$

Lemma 3.3 of White (1980a) with (A.4) and (A.5) indicates:

$$\sqrt{T} \sigma_u^{-1} V_x^{1/2} (\hat{\beta} - \beta^o) \xrightarrow{d} N(0, I_k). \quad \square$$

**Lemma 4.** Define

$$\Xi_{0t} = \kappa_t(\beta^o)' \kappa_t(\beta^o).$$

Under Assumptions 1-5,

- (i)  $\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_{0,ijt} - E(\xi_{0,ijt}) \right| \xrightarrow{a.s.} 0$  for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, q+1$ ), where  $\xi_{0,ijt}$  is the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{0t}$ ;  
(ii)  $\Gamma_0 = E[\kappa_t(\beta^o) \kappa_t(\beta^o)']$  is positive definite.

**Proof.** We can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{0t}$  as:

$$\xi_{0,ijt} = \begin{cases} 1 & (i = j = 1) \\ u_{t-j}^2 & (i = 1, j = 2, \dots, q+1) \\ u_{t-i}^2 & (j = 1, i = 2, \dots, q+1) \\ u_{t-i}^2 u_{t-j}^2 & (i, j = 2, \dots, q+1). \end{cases}$$

By Remark 2.1,  $E|\xi_{0,1jt}| < \infty$  and  $E|\xi_{0,i1t}| < \infty$ . For  $i, j = 2, \dots, q+1$ ,

$$E|\xi_{0,ijt}| = E[u_{t-i}^2 u_{t-j}^2] \leq [E[u_{t-i}^4]]^{1/2} [E[u_{t-j}^4]]^{1/2} = E[u_t^4] < \infty,$$

by Hölder's inequality and the finite fourth moment by Assumption 5. Hence  $E|\xi_{0,ijt}|$  exists and bounded. Since  $u_t$  is strict stationary and ergodic, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure  $\Xi_{0t}$  implies that all elements of  $\Xi_{0t}$  except for  $(1, 1)$  are strict stationary and ergodic. Note that  $\xi_{0,11t} = 1$ . By the ULLN for stationary and ergodic process (Lemma A.2.2 of White (1994)),

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_{0,ijt} - E(\xi_{0,ijt}) \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad (\text{A.6})$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, q+1$ ), which gives Lemma 4(i).

By the structure,  $T^{-1} \sum_{t=1}^T \Xi_{0t}$  is the sample mean of the outer product of random vector  $\kappa_t(\beta^o)$ , thus its determinant is non-negative. Since  $\kappa_t(\beta^o)$  is linearly independent by Assumption 3, the rank of  $T^{-1} \sum_{t=1}^T \Xi_{0t}$  is  $q+1$ , which guarantees that the inverse of the matrix exists almost surely when  $T > q+1$ . Combined with (A.6), we obtain Lemma 4(ii).  $\square$

**Proof of Proposition 1** Since  $u_t$  and  $x_t$  are strictly stationary and ergodic, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (12) implies that elements of  $\kappa_t(\beta^o)' \kappa_t(\beta^o)$  and  $\kappa_t(\hat{\beta})' \kappa_t(\hat{\beta})$  are strict stationary and ergodic. Combined with Lemma 4 and the consistency of  $\hat{\beta}$  by Lemma 2, Lemma 1 indicates that:

$$\left| \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\hat{\beta})' \kappa_t(\hat{\beta}) \right\}_{ij} - \{\Gamma_0\}_{ij} \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, q+1$ ), where  $\Gamma_0$  is stated in Lemma 4. By the proof of Lemma 4,  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\hat{\beta})' \kappa_t(\hat{\beta})$  is nonsingular almost surely for  $T$  sufficiently large. As the elements of  $\Gamma_0^{-1}$  are uniformly bounded,

$$\left| \left\{ \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\hat{\beta})' \kappa_t(\hat{\beta}) \right)^{-1} \right\}_{ij} - \{\Gamma_0^{-1}\}_{ij} \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad (\text{A.7})$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, q+1$ ). Since  $u_t$  and  $x_t$  are strictly stationary and ergodic, the elements of  $\kappa_t(\beta^0)' \varphi_t(\beta^0)$  and  $\kappa_t(\hat{\beta})' \varphi_t(\hat{\beta})$  defined by equation (12) are strictly stationary and ergodic. Since  $E[\{\kappa_t(\beta^0)\}_i^2] = \{\Gamma^0\}_{ii} < K$  by Lemma 3 and  $E[\{\varphi_t(\beta^0)\}^2] = E[u_t^4] < K$  by Assumption 5,

$$E[\{\kappa_t(\beta^0)\}_i \varphi_t(\beta^0)] \leq \sqrt{E[\{\kappa_t(\beta^0)\}_i^2] E[\{\varphi_t(\beta^0)\}^2]} < K \quad (i = 1, \dots, q+1), \quad (\text{A.8})$$

by Hölder's inequality. By the ULLN for stationary ad ergodic process indicates, we obtain:

$$\left| \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\beta^0)' \varphi_t(\beta^0) \right\}_i - \{E[\kappa_t(\beta^0)' \varphi_t(\beta^0)]\}_i \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, q+1$ ). Since  $\Gamma_0^{-1}$  has uniformly bounded elements, uniform continuity implies

$$\left| \left\{ \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\beta^0)' \kappa_t(\beta^0) \right]^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\beta^0)' \varphi_t(\beta^0) \right\}_i - \{\Gamma_0^{-1} E[\kappa_t(\beta^0)' \varphi_t(\beta^0)]\}_i \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, q+1$ ). By Assumption 4,

$$\left| \left\{ \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\beta^0)' \kappa_t(\beta^0) \right]^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\beta^0)' \varphi_t(\beta^0) \right\}_i - \delta_i^o \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, q+1$ ). By (A.7) and the consistency of  $\hat{\beta}$  by Lemma 2, Lemma 1 indicates:

$$\left| \left\{ \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\hat{\beta})' \kappa_t(\hat{\beta}) \right]^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \kappa_t(\hat{\beta})' \varphi_t(\hat{\beta}) \right\}_i - \delta_i^o \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, q+1$ ), showing that  $\hat{\delta} \xrightarrow{a.s.} \delta^o$ . The covariance matrix of  $\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta^o)$  is given by:

$$V(\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta^o)) = \Gamma_0^{-1} E \left[ (u_t^2 \kappa_t(\beta^0)' - E[u_t^2 \kappa_t(\beta^0)'])' (u_t^2 \kappa_t(\beta^0)' - E[u_t^2 \kappa_t(\beta^0)']) \right] \Gamma_0^{-1}.$$

Since the elements of  $\Gamma_0^{-1}$  are bounded and those of  $E[u_t^4 \kappa_t(\beta^0)' \kappa_t(\beta^0)]$  are bounded by (A.8), the elements of  $V(\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta^o))$  are bounded. By Chebyshev's inequality,

$$P(\sqrt{T}|\hat{\delta}_i - \delta_i^o| < \epsilon) \geq 1 - \frac{V(\sqrt{T}(\hat{\delta}_i - \delta_i^o))}{\epsilon^2},$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, q+1$ ). The result establishes  $\sqrt{T}(\hat{\delta} - \delta^o) = O_p(1)$ .  $\square$

## A.2 Proof of Proposition 2

Define the information set up to  $t$  as  $\mathcal{F}_t = \{y_t, x_t, y_{t-1}, x_{t-1}, \dots\}$ .

**Lemma 5.** *Under Assumption 1 and 2,  $h_t(\theta)$  is strict stationary and ergodic with:*

$$E[h_t(\theta)] = \delta_0 + [\sigma_u^2 + (\beta - \beta_0)' V_x (\beta - \beta_0)] \sum_{i=1}^q \delta_i, \quad (\text{A.9})$$

where

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \gamma_1^2 - \dots - \gamma_q^2},$$

and  $\sigma_e^2$  is the variance of  $e_t$  defined by (5).

**Proof.** Noting that  $y_{t-i} - x_{t-i}\beta = u_{t-i} - x_{t-i}(\beta - \beta_0)$ , we obtain:

$$h_t(\theta) = \delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i [u_{t-i} - x_{t-i}(\beta - \beta_0)]^2, \quad (\text{A.10})$$

where  $\beta_0$  is the true value of  $\beta$ . Since  $u_t$  and  $x_t$  are stationary and ergodic by Assumptions 1 and 2, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.10) implies that  $h_t(\theta)$  is stationary and ergodic. For obtaining  $E[h_t(\theta)]$ , the variance of  $u_t$  is obtained by the conventional approach. Since  $u_t$  is uncorrelated with  $x_t$  by Assumption 2, we obtain  $E[\{u_{t-i} - x_{t-i}(\beta - \beta_0)\}^2] = \sigma_u^2 + (\beta - \beta_0)' V_x (\beta - \beta_0)$ . Then we obtain (A.9).  $\square$

**Lemma 6.** Let  $\Xi_{1t}(\theta) = [h_t(\theta)]^{-1} x_t' x_t$ . Under Assumptions 1-4,

- (i)  $\sup_{\theta \in \Theta} |T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{1,ijt}(\theta) - E[\xi_{1,ijt}(\theta)]| \xrightarrow{P} 0$  for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ), where  $\xi_{1,ijt}(\theta)$  is the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{1t}(\theta)$ ;
- (ii)  $\{T^{-1} \sum_{t=1}^T E[\Xi_{1t}(\theta)] : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$  is  $O(1)$  and continuous on  $\Theta$  uniformly in  $T$ ;
- (iii)  $E[\Xi_{1t}(\theta^o)]$  is positive definite.

**Proof.** By definition, we obtain:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \|\Xi_{1t}(\theta)\| = \sup_{\theta \in \Theta} [h_t(\delta, \beta)]^{-1} \|x_t' x_t\|,$$

and

$$\begin{aligned} \|x_t x_t'\| &= \sqrt{\text{tr}((x_t' x_t)'(x_t' x_t))} = \sqrt{\text{tr}(x_t' x_t x_t' x_t)} = \sqrt{\text{tr}((x_t x_t')^2)} \\ &= x_t x_t' = \left\{ \sqrt{\text{tr}(x_t x_t')} \right\}^2 = \|x_t\|^2. \end{aligned}$$

Noting that  $h_t(\delta, \beta) \geq \delta_0 > 0$  by Assumption 3, we obtain:

$$E \left[ \sup_{\theta \in \Theta} \|\Xi_{1t}(\theta)\| \right] = E \left[ \sup_{\theta \in \Theta} [h_t(\theta)]^{-1} \|x_t' x_t\| \right] \leq K E \left[ \sup_{\theta \in \Theta} \|x_t\|^2 \right] = K E [\|x_t\|^2] < \infty. \quad (\text{A.11})$$

The first inequality comes from Assumption 4. Since  $1/h_t(\delta, \beta)$  is strict stationary and ergodic by Lemma 5, the uniform law of large numbers (ULLN) for stationary ergodic process (see Theorem A.2.2 of White (1994)) with the result  $E[\sup_{\theta \in \Theta} \|\Xi_{1t}(\theta)\|] < \infty$  indicate that:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{1,ijt}(\theta) - E[\xi_{1,ijt}(\theta)] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). By the almost sure convergence, we obtain the weak convergence in Lemma 6(i).

By (A.11),  $E[\Xi_{it}(\theta)]$  exists, and it does not depend on  $t$  and continuous on  $\Theta$  by the structure. Thus Lemma 6(ii) holds.

By equation (10),  $h_t(\theta^o)$  is independent of  $x_t$ . Hence  $E[\Xi_{it}(\theta^o)] = E[1/h_t(\theta^o)]V_x$ . Since  $E[1/h_t(\theta^o)] > 0$ , we obtain Lemma 6(iii) by Assumption 2.  $\square$

**Lemma 7.** Define

$$\Xi_{2t}(\theta) = -[h_t(\theta)]^{-1}x'_t[(y_{t-1} - x_{t-1}\beta) \cdots (y_{t-p} - x_{t-p}\beta)]. \quad (\text{A.12})$$

Under Assumptions 1-4,

- (i)  $\sup_{\theta \in \Theta} |T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{2,ijt}(\theta) - E[\xi_{2,ijt}(\theta)]| \xrightarrow{p} 0$  for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ), where  $\xi_{2,ijt}(\theta)$  is the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{2t}(\theta)$ ;
- (ii)  $\{T^{-1} \sum_{t=1}^T E[\Xi_{2t}(\theta)] : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$  is  $O(1)$  and continuous on  $\Theta$  uniformly in  $T$ .

**Proof.** By (A.12), we obtain an alternative expression of  $\Xi_{2t}(\theta)$  as:

$$\Xi_{2t}(\theta) = -[h_t(\theta)]^{-1}x'_t[(u_{t-1} - x_{t-1}(\beta - \beta^o)) \cdots (u_{t-p} - x_{t-p}(\beta - \beta^o))].$$

We can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{2t}(\theta)$  as:

$$\xi_{2,ijt}(\theta) = -[h_t(\delta, \beta)]^{-1}x_{it}(u_{t-j} - x_{t-j}(\beta - \beta^o)).$$

To prove Lemma 7(i), we will show that  $E[\sup_{\beta \in \Theta_\beta} |\xi_{2,ijt}|]$  is finite. By Assumptions 3 and 4 and  $h_t(\theta) \geq \delta_0 > 0$ , we obtain:

$$|\xi_{2,ijt}(\theta)| \leq K|x_{it}(u_{t-j} - x_{t-j}(\beta - \beta^o))| \leq K \left[ |x_{it}u_{t-j}| + \sum_{l=1}^k |x_{it}x_{l,t-j}||\beta_l - \beta_l^o| \right].$$

For the upper bound of  $|\beta_l - \beta_l^o|$  ( $l = 1, \dots, k$ ), we follow the approach of the proof of Theorem 1 of White (1980b). Since  $\beta^o$  is finite, there exists a compact neighborhood of  $\nu$  of  $\beta^o$  such that  $(\beta_l - \beta_l^o)$  is finite. There also exists a finite vector  $\tilde{\beta}$  (not necessarily in  $\nu$ ) with element  $\tilde{\beta}_l$  such that  $|\beta_l - \beta_l^o| \leq |\tilde{\beta}_l - \beta_l^o|$  for all  $\beta$  in  $\nu$ , so that for all  $\beta$  in  $\nu$ :

$$\sum_{l=1}^k |x_{it}x_{l,t-j}||\beta_l - \beta_l^o| \leq \sum_{l=1}^k |x_{it}x_{l,t-j}||\tilde{\beta}_l - \beta_l^o|.$$

Hence we obtain  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{2,ijt}(\theta)|] < \infty$ . Since  $1/h_t(\delta, \beta)$  is strict stationary and ergodic by Lemma 5, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.12) implies that  $\xi_{2,ijt}(\theta)$  is strict stationary and ergodic. The ULLN for stationary ergodic processes (Theorem A.2.2 of White (1994)) with the result  $E[\sup_{\beta \in \Theta_\beta} |\xi_{2,ijt}(\theta)|] < \infty$  indicates that:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{2,ijt}(\theta) - E[\xi_{2,ijt}(\theta)] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ). By the almost sure convergence, we obtain the weak convergence in Lemma 7(i). By the proof of Lemma 7(i),  $E[\Xi_{2t}(\theta)]$  exists, and it does not depend on  $t$  and continuous on  $\Theta$  by the structure. Thus Lemma 7(ii) holds.  $\square$

**Lemma 8.** *Define*

$$B_T^o = [E [h_t(\theta^o)]^{-1} x_t' x_t]^{-1} E [h_t(\theta^o)]^{-1} x_t' \lambda_t(\beta^o).$$

*Under Assumptions 1-4,  $B_T^o$  exists and*

$$\hat{B}_T - B_T^o = o_p(1), \quad (\text{A.13})$$

*where  $\hat{B}_T$  is defined by equation (13).*

**Proof.** Noting that  $B_T^o = [E[\Xi_{1t}(\theta^o)]]^{-1} E[\Xi_{2t}(\theta^o)]$ , Lemmas 6 and 7 indicate that  $B_T(\theta^o)$  exists. Since  $\hat{\beta} - \beta^o \xrightarrow{p} 0$  by Lemma 3 and  $\hat{\delta} - \delta^o \xrightarrow{p} 0$  by Proposition 1, Lemmas 6 and 7 satisfy the conditions of Lemma 1, which establishes (A.13).  $\square$

**Lemma 9.** *Define*

$$\Xi_{3t}(\theta) = -\frac{\psi_t(\beta)}{h_t(\theta)} x_t'$$

*Under Assumptions 1-4,*

- (i)  $\sup_{\theta \in \Theta} |T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{3,it}(\theta) - E[\xi_{3,it}(\theta)]| \xrightarrow{p} 0$  for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), where  $\xi_{3,it}(\theta)$  is the  $i$ th element of  $\Xi_{3t}(\theta)$ ;
- (ii)  $\{T^{-1} \sum_{t=1}^T E[\Xi_{3t}(\theta)] : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$  is  $O(1)$  and continuous on  $\Theta$  uniformly in  $T$ ;
- (iii)  $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \Xi_{3t}(\theta^o) = O_p(1)$ .

**Proof.** Assumptions 3 and 4 indicates:

$$|\xi_{3,it}(\theta)| \leq \frac{1}{h_t(\theta)} |x_{it}(u_t - x_t(\beta - \beta^o))| \leq K|x_{it}u_t| + K \sum_{l=1}^k |x_{it}x_{lt}| |\beta_l - \beta_l^o|.$$

By discussions similar to the proof of Lemma 7, we obtain  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{3,it}(\theta)|] < \infty$ , and we can show that  $\xi_{3,it}(\theta)$  is strict stationary ergodic process by Theorem 3.5.8 of Stout (1974). By applying the ULLN for stationary ergodic process (Theorem A.2.2 of White (1994)) with  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{3,it}(\theta)|] < \infty$  indicates that:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{3,it}(\theta) - E[\xi_{3,it}(\theta)] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). By the almost sure convergence, we obtain the weak convergence in Lemma 9(i).

Since  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{3,it}(\theta)|] < \infty$ ,  $E[\Xi_{3t}(\theta)]$  exists, and it does not depend on  $t$  and continuous on  $\Theta$  by the structure. Thus Lemma 9(ii) holds.

When  $\beta = \beta^o$ , conditional on the information set up to  $t-1$ , we obtain  $E(\xi_{3,it}(\theta^o) | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$  and:

$$V(\xi_{3,it}(\theta^o) | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{E(u_t^2)E(x_{it}^2)}{[h_t(\theta^o)]^2} \leq K\sigma_u^2\{V_x\}_{ii} < \infty,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), by Assumptions 2-4. Hence  $V(\xi_{3,it}(\theta))$  is also bounded. By Chebyshev's inequality,

$$P \left( \left| T^{-1/2} \sum_{t=1}^T \Xi_{3t}(\theta^o) \right| < \epsilon \right) \geq 1 - \frac{V(\xi_{3,it}(\theta))}{\epsilon^2}$$

for any  $\epsilon > 0$  and all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), indicating that Lemma 9(iii) holds.  $\square$

**Lemma 10.** Define

$$\Xi_{4t}(\theta) = \frac{\psi_t(\beta)}{[h_t(\theta)]^3} x'_t \kappa_t(\beta) \quad (\text{A.14})$$

Under Assumptions 1-4,

(i)  $\sup_{\theta \in \Theta} |T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{4,it}(\theta) - E[\xi_{4,it}(\theta)]| \xrightarrow{p} 0$  for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, q+1$ ), where  $\xi_{4,it}(\theta)$  is the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{4t}(\theta)$ ;

(ii)  $\{T^{-1} \sum_{t=1}^T E[\Xi_{4t}(\theta)] : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$  is  $O(1)$  and continuous on  $\Theta$  uniformly in  $T$ .

**Proof.** We can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{4t}(\theta)$  as:

$$\xi_{4,it}(\theta) = \begin{cases} -[h_t(\theta)]^{-3} \psi_t(\beta) x_{it} & \text{for } j = 1, \\ -[h_t(\theta)]^{-3} \psi_t(\beta) x_{it} (u_{t-j+1} - x_{t-j+1}(\beta - \beta^o))^2 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, q+1$ ). For  $j = 1$ , noting that  $h_t(\delta, \beta) \geq \delta_0 > 0$ , we just need to replace  $h_t(\delta, \beta)$  by  $[h_t(\delta, \beta)]^3$  in the proof of Lemma 9 to obtain the result of Lemma 10.

Hence, we concentrate on the case  $j = 2, \dots, q+1$ .

By Assumptions 3 and 4 and  $h_t(\theta) \geq \delta_0 > 0$ , we obtain:

$$\begin{aligned} |\xi_{4,it}(\theta)| &\leq [h_t(\delta, \beta)]^{-3} |x_{it} (u_t - x_t(\beta - \beta^o)) (u_{t-j+1} - x_{t-j+1}(\beta - \beta^o))^2| \\ &\leq K \left[ |u_t u_{t-j} x_{it}| + \left| u_{t-j+1}^2 \sum_{l=1}^k x_{it} x_{lt} (\beta_l - \beta_l^o) \right| \right. \\ &\quad + 2 \left| u_t u_{t-j+1} \sum_{l=1}^k x_{it} x_{l,t-j+1} (\beta_l - \beta_l^o) \right| \\ &\quad + \left| u_t \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k x_{it} x_{l,t-j+1} x_{r,t-j+1} (\beta_l - \beta_l^o) (\beta_r - \beta_r^o) \right| \\ &\quad + 2 \left| u_{t-j+1} \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k x_{it} x_{lt} x_{r,t-j+1} (\beta_l - \beta_l^o) (\beta_r - \beta_r^o) \right| \\ &\quad \left. + \left| \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k x_{it} x_{mt} x_{l,t-j+1} x_{r,t-j+1} (\beta_m - \beta_m^o) (\beta_l - \beta_l^o) (\beta_r - \beta_r^o) \right| \right] \\ &\leq K \left[ |u_t u_{t-j}| |x_{it}| + |u_{t-j+1}^2| \sum_{l=1}^k |x_{it} x_{lt}| |\beta_l - \beta_l^o| \right. \\ &\quad + 2 |u_t u_{t-j+1}| \sum_{l=1}^k |x_{it} x_{l,t-j+1}| |\beta_l - \beta_l^o| \\ &\quad \left. + |u_t| \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k |x_{it} x_{l,t-j+1} x_{r,t-j+1}| |\beta_l - \beta_l^o| |\beta_r - \beta_r^o| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2|u_{t-j+1}| \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k |x_{it}x_{lt}x_{r,t-j+1}| |\beta_l - \beta_l^o| |\beta_r - \beta_r^o| \\
& + \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k |x_{it}x_{mt}x_{l,t-j+1}x_{r,t-j+1}| |\beta_m - \beta_m^o| |\beta_l - \beta_l^o| |\beta_r - \beta_r^o| \Big],
\end{aligned}$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 2, \dots, q+1$ ). Since  $|\beta_l - \beta_l^o|$  is bounded by the discussion of the proof of Lemma 7,

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{4,ijt}(\theta)| & \leq K_1 |u_t u_{t-j}| |x_{it}| + K_2 |u_{t-j+1}^2| \sum_{l=1}^k |x_{it}x_{lt}| + K_3 |u_t u_{t-j+1}| \sum_{l=1}^k |x_{it}x_{l,t-j+1}| \\
& + K_4 |u_t| \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k |x_{it}x_{l,t-j+1}x_{r,t-j+1}| + K_5 |u_{t-j+1}| \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k |x_{it}x_{lt}x_{r,t-j+1}| \\
& + K_6 \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k |x_{it}x_{mt}x_{l,t-j+1}x_{r,t-j+1}|,
\end{aligned}$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 2, \dots, q+1$ ). By Assumption 2, we obtain  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{4,ijt}(\theta)|] < \infty$ . Since  $h_t(\theta)$ ,  $\psi_t(\beta)$ ,  $x_t$  are strict stationary ergodic processes, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.14) implies that  $\xi_{4,ijt}(\theta)$  is strict stationary and ergodic. The ULLN for stationary ergodic processes (Theorem A.2.2 of White (1994)) with the result  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{4,ijt}(\theta)|] < \infty$  indicates that:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{4,ijt}(\theta) - E[\xi_{4,ijt}(\theta)] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 2, \dots, q+1$ ). By the almost sure convergence, we obtain the weak convergence in Lemma 10(i). By the proof of Lemma 10(i),  $E[\Xi_{4t}(\theta)]$  exists, and it does not depend on  $t$  and continuous on  $\Theta$  by the structure. Thus Lemma 10(ii) holds.  $\square$

**Lemma 11.** Define

$$\Xi_{5t}(\theta) = \frac{-2\psi_t(\beta)}{[h_t(\theta)]^3} x_t' \sum_{l=1}^q \delta_l (y_{t-l} - x_{t-l}\beta) x_{t-l}. \quad (\text{A.15})$$

Under Assumption 1-4,

- (i)  $\sup_{\theta \in \Theta} |T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{5,ijt}(\theta) - E[\xi_{5,ijt}(\theta)]| \xrightarrow{p} 0$  for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ), where  $\xi_{5,ijt}(\theta)$  is the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{5t}(\theta)$ ;
- (ii)  $\{T^{-1} \sum_{t=1}^T E[\Xi_{5t}(\theta)] : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$  is  $O(1)$  and continuous on  $\Theta$  uniformly in  $T$ .

**Proof.** We can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{5t}(\theta)$  as:

$$\xi_{5,ijt}(\theta) = -2[h_t(\theta)]^{-3} \psi_t(\beta) x_{it} \sum_{l=1}^q \delta_l (u_{t-l} - x_{t-l}(\beta - \beta^o)) x_{j,t-l}$$

for  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). Noting that  $h_t(\theta) \geq \delta_0 > 0$ , Assumptions 3 and 4, we obtain:

$$|\xi_{5,ijt}(\theta)| \leq [h_t(\theta)]^{-3} \left| (u_t - x_t(\beta - \beta^o)) x_{it} \sum_{l=1}^q \delta_l (u_{t-l} - x_{t-l}(\beta - \beta^o)) x_{j,t-l} \right|$$



$$\begin{aligned}
&\leq K \sum_{l=1}^q \delta_l \left| u_t u_{t-l} x_{it} - u_t x_{it} x_{j,t-l} \sum_{r=1}^k x_{r,t-l} (\beta_r - \beta_r^o) \right. \\
&\quad \left. - u_{t-l} x_{j,t-l} \sum_{r=1}^k x_{rt} (\beta_r - \beta_r^o) \right. \\
&\quad \left. + x_{j,t-l} \sum_{r=1}^k \sum_{m=1}^k x_{rt} x_{m,t-l} (\beta_r - \beta_r^o) (\beta_m - \beta_m^o) \right| \\
&\leq K \sum_{l=1}^q \delta_l \left[ |u_t u_{t-l}| |x_{it}| + |u_t| \sum_{r=1}^k |x_{it} x_{j,t-l} x_{r,t-l}| |\beta_r - \beta_r^o| \right. \\
&\quad \left. + |u_{t-l}| \sum_{r=1}^k |x_{j,t-l} x_{rt}| |\beta_r - \beta_r^o| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=1}^k \sum_{m=1}^k |x_{j,t-l} x_{rt} x_{m,t-l}| |\beta_r - \beta_r^o| |\beta_m - \beta_m^o| \right],
\end{aligned}$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). Since  $|\beta_l - \beta_l^o|$  is bounded by the discussion of the proof of Lemma 7 and  $\delta_l$  is bounded by Assumption 4,

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{5,ijt}(\theta)| &\leq K_1 \sum_{l=1}^q \left[ |u_t u_{t-l}| |x_{it}| + K_2 |u_t| \sum_{r=1}^k |x_{it} x_{j,t-l} x_{r,t-l}| \right. \\
&\quad \left. + K_2 |u_{t-l}| \sum_{r=1}^k |x_{j,t-l} x_{rt}| + K_3 \sum_{r=1}^k \sum_{m=1}^k |x_{j,t-l} x_{rt} x_{m,t-l}| \right],
\end{aligned}$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). By Assumption 2, we obtain  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{5,ijt}(\theta)|] < \infty$ . Since  $h_t(\theta)$ ,  $\psi_t(\beta)$ , and  $x_t$  are strict stationary ergodic processes, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.15) implies that  $\xi_{5,ijt}(\theta)$  is strict stationary and ergodic. The ULLN for stationary ergodic processes (Theorem A.2.2 of White (1994)) with the result  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{5,ijt}(\theta)|] < \infty$  indicates that:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{5,ijt}(\theta) - E[\xi_{5,ijt}(\theta)] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). By the almost sure convergence, we obtain the weak convergence in Lemma 11(i). By the proof of Lemma 11(i),  $E[\Xi_{5t}(\theta)]$  exists, and it does not depend on  $t$  and continuous on  $\Theta$  by the structure. Thus Lemma 11(ii) holds.  $\square$

**Lemma 12.** Under Assumptions 1-5,  $B_T^o = 0$ .

**Proof.** Define

$$\Xi_{6t}^o = \frac{1}{h_t(\theta^o)} x_t' \lambda_t(\beta^o).$$

We can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{6t}^o$  as:

$$\xi_{6,ijt}^o = \frac{1}{h_t(\theta^o)} x_{it} u_{t-j},$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ). By the structure,  $\Xi_{6t}^o$  is an odd function of  $u_{t-j}$ . Since  $u_{t-j}$  has

a symmetric distribution by Assumption 5,  $E[\xi_{6,ijt}^o | x_t, u_t^{(-j)}]$ , where  $u_t^{(-j)} = \{u_{t-1}, \dots, u_{t-j+1}, u_{t-j-1}, \dots, u_{t-p}\} \cap \{u_{t-1}, \dots, u_{t-q}\}$ , is the integral of an odd function with respect to  $u_{t-j}$  from  $-\infty$  to  $\infty$ , and thus  $E[\xi_{6,ijt}^o | x_t, u_t^{(-j)}] = 0$ . By the law of iterated expectation,  $E[\xi_{6,ijt}^o] = E[E[\xi_{6,ijt}^o | x_t, u_t^{(-j)}]] = 0$  for all  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ). Thus we obtain,  $B_T^o = (E[h_t(\theta^o)]^{-1} x_t' x_t)^{-1} E(\Xi_{6t}^o) = 0$ .  $\square$

**Lemma 13.** Define

$$\Xi_{7t}^o = \frac{1}{h_t(\theta^o)} [\lambda_t(\beta^o) - x_t B_T^o]' \frac{\partial \psi_t(\beta^o)}{\partial \beta}.$$

Under Assumptions 1-5,  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Xi_{7t}^o = o_p(1)$ .

**Proof.** Noting that  $\frac{\partial \psi_t(\beta)}{\partial \beta} = -x_t$  and  $B_T^o = 0$  by Lemma 12, we can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{7t}^o$  as:

$$\xi_{7,ijt}^o = -\frac{1}{h_t(\theta^o)} u_{t-i} x_{jt} = \xi_{2,jit}(\theta^o),$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). By the structure,  $\Xi_{7t}^o$  is an odd function of  $u_{t-i}$ . Since  $u_{t-i}$  has a symmetric distribution by Assumption 5,  $E[\xi_{7,ijt}^o | x_t, u_t^{(-i)}]$  is the integral of an odd function with respect to  $u_{t-i}$  from  $-\infty$  to  $\infty$ , and thus  $E[\xi_{7,ijt}^o | x_t, u_t^{(-i)}] = 0$ . By the law of iterated expectation,  $E[\xi_{7,ijt}^o] = E[E[\xi_{7,ijt}^o | x_t, u_t^{(-i)}]] = 0$  for all  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). By Lemma 7 with  $E[\xi_{7,ijt}(\theta^o)] = 0$  for all  $i$  and  $j$ , we obtain  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Xi_{7t}(\theta^o) \xrightarrow{a.s.} 0$ , which indicates  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Xi_{7t}(\theta^o) = o_p(1)$ .  $\square$

**Lemma 14.** Define

$$\Xi_{8t}^o = \frac{\psi_t(\beta^o)}{h_t(\theta^o)} \left[ \frac{\partial \lambda_t(\beta^o)}{\partial \theta} \right]'$$

Under Assumptions 1-5,  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Xi_{8t}^o(\theta^o) = o_p(1)$ .

**Proof.** Since  $\frac{\partial \lambda_t(\beta)}{\partial \delta} = 0$ , we can concentrate on the part including

$$\frac{\partial \lambda_t(\beta)}{\partial \beta} = -[x'_{t-1} \cdots x'_{t-p}].$$

We can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{8t}^o$  as:

$$\xi_{8,ijt}^o = -\frac{1}{h_t(\theta^o)} u_t x_{i,t-j},$$

for  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). With a minor change of the discussion of the proof of Lemma 9, we can show that:

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_{8,ijt}^o - E[\xi_{8,ijt}^o] \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad (\text{A.16})$$

for all  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Since  $E[\xi_{8,ijt}^o | \mathcal{F}_{t-1}] = -\frac{x_{i,t-j}}{h_t(\theta^o)} E[u_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ , the law of iterated expectation indicates  $E[\xi_{8,ijt}^o] = 0$ . Equation (A.16) with  $E[\xi_{8,ijt}^o] = 0$  establishes Lemma 14.  $\square$

**Lemma 15.** *Define*

$$\Xi_{9t}^o = [\lambda_t(\beta^o) - x_t B_T^o]' \frac{\psi_t(\beta^o)}{[h_t(\theta^o)]^2} \frac{\partial h_t(\theta^o)}{\partial \beta'}. \quad (\text{A.17})$$

Under Assumptions 1-5 and  $H_0$ ,  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Xi_{9t}(\theta^o) = o_p(1)$ .

**Proof.** Noting that  $B_T^o = 0$  by Lemma 11 and

$$\frac{\partial h_t(\theta^o)}{\partial \beta'} = -2 \sum_{l=1}^q \delta_l^o u_{t-l} x_{t-l},$$

we can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{9t}^o$  under  $H_0$  as:

$$\xi_{9,ijt}^o = -\frac{2e_t e_{t-i}}{[h_t(\theta^o)]^2} \sum_{l=1}^q \delta_l^o e_{t-l} x_{j,t-l},$$

for  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). By Assumption 3

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{9,ijt}^o| \leq K \left| e_t e_{t-i} \sum_{l=1}^q \delta_l^o e_{t-l} x_{j,t-l} \right| \leq K \sum_{l=1}^q |e_t e_{t-i} e_{t-l}| |x_{j,t-l}|,$$

and hence

$$E \left[ \sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{9,ijt}^o| \right] \leq K \sum_{l=1}^q E |e_t e_{t-i} e_{t-l}| E |x_{j,t-l}| < \infty,$$

by Assumptions 2 and 5. Thus,  $E[\xi_{9,ijt}^o]$  exists and it is bounded. Since  $h_t(\theta^o)$ ,  $e_t$ , and  $x_t$  are strict stationary ergodic processes, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.17) implies that  $\xi_{9,ijt}^o$  is also strict stationary ergodic. By the ULLN for stationary ergodic process (Theorem A.2.2 of White (1994)) with  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{9,ijt}^o|] < \infty$ ,

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_{9,ijt}^o - E[\xi_{9,ijt}^o] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). By the structure,  $E[\xi_{9,ijt}^o | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ , and hence the law of iterated expectation indicates  $E[\xi_{10,ijt}^o] = 0$ . Therefore, we obtain  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Xi_{9t}(\theta^o) \xrightarrow{a.s.} 0$ . Since the almost sure convergence implies the convergence in probability, which is equivalent to the definition of  $o_p(1)$ , the result establishes Lemma 15.  $\square$

**Lemma 16.** *Define*

$$\Xi_{10t}^o = [\lambda_t(\beta^o) - x_t B_T^o]' \frac{\psi_t(\beta^o)}{[h_t(\theta^o)]^2} \frac{\partial h_t(\theta^o)}{\partial \delta'}. \quad (\text{A.18})$$

Under Assumptions 1-5 and  $H_0$ ,  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Xi_{10t}(\theta^o) = o_p(1)$ .

**Proof.** Noting that  $B_T^o = 0$  by Lemma 11 and:

$$\frac{\partial h_t(\theta^o)}{\partial \beta'} = [1 \ u_{t-1}^2 \ \cdots \ u_{t-q}^2],$$

we can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{10t}^o$  under  $H_0$  as:

$$\xi_{10,ijt}^o = \begin{cases} \frac{e_t e_{t-i}}{[h_t(\theta^o)]^2} & \text{for } j = 1, \\ \frac{e_t e_{t-i} e_{t-j}^2}{[h_t(\theta^o)]^2} & \text{for } j = 2, \dots, q+1, \end{cases}$$

for  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). By Assumption 3,

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{10,ijt}^o| \leq K |e_t e_{t-i}|,$$

for  $j = 1$ , and:

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{10,ijt}^o| \leq K |e_t e_{t-i} e_{t-j}^2|,$$

for  $j = 2, \dots, q+1$ . Since  $E|e_t e_{t-i}| < \infty$  and  $E|e_t e_{t-i} e_{t-j}^2| < \infty$  by Assumption 5,  $E[\xi_{10,ijt}^o]$  exists and it is bounded. Since  $h_t(\theta^o)$  and  $e_t$  are strict stationary ergodic processes, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.18) implies that  $\xi_{10,ijt}^o$  is also strict stationary and ergodic. By the ULLN for stationary ergodic process (Theorem A.2.2 of White (1994)) with  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{10,ijt}^o|] < \infty$ ,

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_{10,ijt}^o - E[\xi_{10,ijt}^o] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) and  $j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). By the structure,  $E[\xi_{10,ijt}^o | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ , and hence the law of iterated expectation indicates  $E[\xi_{10,ijt}^o] = 0$ . Therefore, we obtain  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Xi_{10t}(\theta^o) \xrightarrow{a.s.} 0$ . Since the almost sure convergence implies the convergence in probability, which is equivalent to the definition of  $o_p(1)$ , the result establishes Lemma 16.  $\square$

**Lemma 17.** Define

$$\ddot{\Omega}_T^o = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Omega_t^o, \tag{A.19}$$

where

$$\Omega_t^o = E \left[ \left[ \frac{\psi_t(\beta^o)}{h_t(\theta^o)} \right]^2 \lambda_t(\beta^o)' \lambda_t(\beta^o) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right].$$

Under Assumptions 1-5 and  $H_0$ ,

- (i)  $\ddot{\Omega}_T^o$  is positive definite for large  $T$ ;
- (ii)  $|T^{-1} \sum_{t=1}^T \omega_{ijt}^o - E[\omega_{ijt}^o]| \xrightarrow{p} 0$  for all  $i$  and  $j$  ( $i = 1, \dots, p$ ),  
where  $\omega_{ijt}^o$  is the  $(i, j)$ th element of  $\Omega_t^o$ .

**Proof.** Noting that

$$\Omega_t^o = \frac{\sigma_u^2}{[h_t(\theta^o)]^2} \lambda_t(\beta^o)' \lambda_t(\beta^o),$$

we can write the  $(i, j)$ th element of  $\Omega_t^o$  under  $H_0$  as:

$$\omega_{ijt}^o = \frac{\sigma_e^2}{[h_t(\theta^o)]^2} e_{t-i} e_{t-j}$$

for  $i$  and  $j$  ( $i = 1, \dots, p$ ). By Assumption 3

$$|\omega_{ijt}^o| \leq K |e_{t-i}e_{t-j}|,$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ). Since  $E[e_{t-i}e_{t-j}] < \infty$  by Assumption 5,  $E[\omega_{ijt}^o]$  exists and it is bounded. By the structure,  $\ddot{\Omega}_T^o$  is the sample mean of the outer product of random vector  $[\sigma_e/h_t(\theta^o)]\lambda_t(\beta^o)$ , thus its determinant is non-negative. Since  $\lambda_t(\beta^o)$  is linearly independent by Assumption 1, the rank of  $\ddot{\Omega}_T^o$  is  $p$ , which guarantees that the inverse of the matrix exists almost surely when  $T > p$ . Combined with (A.6), we obtain Lemma 17(i).

Since  $h_t(\theta^o)$  and  $e_t$  are strict stationary ergodic processes, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.19) implies that  $\omega_{ijt}^o$  is strict stationary and ergodic. The uniform law of large numbers (ULLN) for stationary ergodic process (Theorem A.2.2 of White (1994)) with the result  $E[|\omega_{ijt}^o|] < \infty$  indicates that:

$$\left| T^{-1} \sum_{t=1}^T \omega_{ijt}^o - E[\omega_{ijt}^o] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ). By the almost sure convergence, we obtain the weak convergence in Lemma 17(ii).  $\square$

**Lemma 18.** *Define*

$$\ddot{\zeta}_t^o = \frac{\psi_t(\beta^o)}{h_t(\theta^o)} \lambda_t(\beta^o)'. \quad (\text{A.20})$$

*Under Assumptions 1-5,*

$$\ddot{\Omega}^{o-1/2} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \ddot{\zeta}_t^o \xrightarrow{d} N(0, I_k),$$

*where  $\ddot{\Omega}^o = E[\Omega_t^o]$ , where  $\Omega_t^o$  is stated in Lemma 17.*

**Proof.** By the definition,  $E[\ddot{\zeta}_t^o | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$  and  $V[\ddot{\zeta}_t^o | \mathcal{F}_{t-1}] = \Omega_t^o$ . Since  $e_t$  and  $h_t(\theta^o)$  are strictly stationary and ergodic, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.21) implies that  $\ddot{\zeta}_t^o$  is strictly stationary ergodic martingale difference under  $H_0$ . Since  $\ddot{\Omega}^o$  is finite and positive definite by Lemma 17, we can define the symmetric positive definite matrix,  $\ddot{\Omega}^{o-1/2}$ , such that  $(\ddot{\Omega}^{o-1/2})^2 = \ddot{\Omega}^{o-1}$ . Lemma 17 implies that  $\ddot{\Omega}^{o-1/2}$  is uniformly bounded. By Lemma 3.2 of White (1980a),

$$\left| \left\{ \ddot{\Omega}^{o-1/2} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Omega_t^o \right] \ddot{\Omega}^{o-1/2} \right\}_{i,j} - \{I_p\}_{i,j} \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad (\text{A.21})$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ). For the  $i$ th element of  $\ddot{\zeta}_t^o$ ,  $\ddot{\zeta}_{it}^o$  ( $i = 1, \dots, p$ ), Chebyshev's inequality indicates:

$$P\left(\left|\frac{\ddot{\zeta}_{it}^o}{\sqrt{T}}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{V(\ddot{\zeta}_{it}^o)}{T\epsilon^2} = \frac{\ddot{\omega}_{ij}^o}{T\epsilon^2} \rightarrow 0,$$

as  $T \rightarrow \infty$ , where  $\ddot{\omega}_{ij}^o$  is the  $(i, j)$ th element of  $\ddot{\Omega}^o$ . Hence,

$$\max_{1 \leq i \leq T} \left| \frac{\ddot{\zeta}_{it}^o}{\sqrt{T}} \right| \xrightarrow{p} 0. \quad (\text{A.22})$$

As equations (A.21) and (A.22) satisfy the regularity conditions for the CLT for the strict stationary ergodic martingale difference (Theorem 24.3 of Davidson (1994)), we obtain

$$\ddot{\Omega}^{o-1/2} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \ddot{\zeta}_t^o \xrightarrow{d} N(0, I_p), \quad (\text{A.23})$$

which establishes Lemma 18.  $\square$

**Lemma 19.** *Define*

$$\Xi_{11t}(\theta) = \frac{[\psi_t(\beta)]^2}{[h_t(\theta)]^2} \lambda_t(\beta)' \lambda_t(\beta). \quad (\text{A.24})$$

*Under Assumptions 1-5 and  $H_0$ ,*

(i)  *$\sup_{\theta \in \Theta} |T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{11,ijt}(\theta) - E[\xi_{11,ijt}(\theta)]| \xrightarrow{p} 0$  for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ), where  $\xi_{11,ijt}(\theta)$  is the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{11t}(\theta)$ ;*

(ii)  *$\{T^{-1} \sum_{t=1}^T E[\Xi_{11t}(\theta)] : \theta \in \Theta, T = 1, 2, \dots\}$  is  $O(1)$  and continuous on  $\Theta$  uniformly in  $T$ .*

**Proof.** We can write the  $(i, j)$ th element of  $\Xi_{11t}(\theta)$  under  $H_0$  as:

$$\xi_{11,ijt}(\theta) = -[h_t(\theta)]^{-2} [e_t - x_t(\beta - \beta^o)]^2 e_{t-i} e_{t-j},$$

for  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ). Noting that  $h_t(\theta) \geq \delta_0 > 0$ , Assumptions 3 and 4, we obtain:

$$\begin{aligned} |\xi_{11,ijt}(\theta)| &\leq [h_t(\delta, \beta)]^{-3} |[e_t - x_t(\beta - \beta^o)]^2 e_{t-i} e_{t-j}| \\ &\leq K \sum_{l=1}^q \left| e_t^2 e_{t-i} e_{t-j} - 2e_{t-i} e_{t-j} \sum_{r=1}^k x_{rt}(\beta_r - \beta_r^o) \right. \\ &\quad \left. + e_{t-i} e_{t-j} \sum_{r=1}^k \sum_{l=1}^k x_{rt} x_{lt}(\beta_r - \beta_r^o)(\beta_l - \beta_l^o) \right| \\ &\leq K \sum_{l=1}^q \left[ |e_t^2 e_{t-i} e_{t-j}| + 2|e_t e_{t-i} e_{t-j}| \sum_{r=1}^k |x_{rt}|(\beta_r - \beta_r^o) \right. \\ &\quad \left. + |e_{t-i} e_{t-j}| \sum_{r=1}^k \sum_{l=1}^k |x_{rt} x_{lt}|(\beta_r - \beta_r^o)(\beta_l - \beta_l^o) \right], \end{aligned}$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). Since  $|\beta_l - \beta_l^o|$  is bounded by the discussion of the proof of Lemma 7,

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{11,ijt}(\theta)| \leq K_1 \sum_{l=1}^q \left[ |e_t^2 e_{t-i} e_{t-j}| + K_2 |e_t e_{t-i} e_{t-j}| \sum_{r=1}^k |x_{rt}| + K_3 |e_{t-i} e_{t-j}| \sum_{r=1}^k \sum_{l=1}^k |x_{rt} x_{lt}| \right],$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ). By Assumptions 2 and 5, we obtain  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{11,ijt}(\theta)|] < \infty$ . Since  $h_t(\theta)$ ,  $\psi_t(\beta)$ , and  $x_t$  are strict stationary ergodic processes, Theorem 3.5.8 of Stout (1974) with the structure (A.15) implies that  $\xi_{11,ijt}(\theta)$  is strict stationary and ergodic. The ULLN for stationary ergodic processes (Theorem A.2.2 of White (1994)) with the result  $E[\sup_{\theta \in \Theta} |\xi_{11,ijt}(\theta)|] < \infty$  indicates that:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| T^{-1} \sum_{t=1}^T \xi_{11,ijt}(\theta) - E[\xi_{11,ijt}(\theta)] \right| \xrightarrow{a.s.} 0,$$

for all  $i$  and  $j$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ). By the almost sure convergence, we obtain the weak convergence in Lemma 19(i). By the proof of Lemma 19(i),  $E[\Xi_{11t}(\theta)]$  exists, and it does not depend on  $t$  and continuous on  $\Theta$  by the structure. Thus Lemma 19(ii) holds.  $\square$

**Proof of Proposition 2** Noting that  $\hat{B}_T - B_T^o = o_p(1)$  by Lemma 8, we rewrite (15) as:

$$\ddot{\zeta}_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\hat{\beta})}{h_t(\hat{\theta})} \left[ \lambda_t(\hat{\beta}) - x_t B_T^o \right]' - \left( \hat{B}_T - B_T^o \right)' \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\hat{\beta})}{h_t(\hat{\theta})} x_t'.$$

We first consider the second term excluding  $\hat{B}_T - B_T^o$ . Noting that  $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^o) = O_p(1)$  by Lemma 3 and Proposition 1, a standard mean value expansion about  $\theta^o$  and Lemma 1 produce:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\hat{\beta})}{h_t(\hat{\theta})} x_t' &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\beta^o)}{h_t(\theta^o)} x_t' + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \frac{1}{h_t(\theta^o)} x_t' \frac{\partial \psi_t(\beta^o)}{\partial \beta} \right\} \sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta^o) \\ &\quad - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\beta^o)}{[h_t(\theta^o)]^2} x_t' \frac{\partial h_t(\theta^o)}{\partial \theta'} \sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^o) + o_p(1) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

For the right-hand-side of (A.25), the first term is  $O_p(1)$  by Lemma 9. Since  $\frac{\partial \psi_t(\beta)}{\partial \beta} = -x_t'$ , the second term is  $[-T^{-1} \sum_{t=1}^T \Xi_{1t}] T^{-1/2}(\hat{\beta} - \beta^o)$ , which is  $O_p(1)$  by Lemmas 3 and 6. Since

$$\frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta'} = \left[ \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \delta'} \quad \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta'} \right] = \left[ \kappa_t(\beta) \quad (-2) \sum_{i=1}^q \delta_i (y_{t-1} - x_{t-i}\beta) x_{t-i} \right],$$

the third term of the right-hand-side of (A.25) is

$$- \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\Xi_{4t}(\theta) \quad \Xi_{5t}(\theta)] \right] \sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^o),$$

which is  $O_p(1)$  by Lemmas 3, 10 and 11 and Proposition 1. Therefore

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\hat{\beta})}{h_t(\hat{\theta})} x_t' = O_p(1).$$

Accompanied by  $\hat{B}_T - B_T^o = o_p(1)$ , this results show that:

$$\ddot{\zeta}_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\hat{\beta})}{h_t(\hat{\theta})} \left[ \lambda_t(\hat{\beta}) - x_t B_T^o \right]' + o_p(1).$$

Noting that  $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^o) = O_p(1)$  by Lemma 3 and Proposition 1, a mean value expansion about  $\theta^o$  and Lemma 1 produce:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_T &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\beta^o)}{h_t(\theta^o)} [\lambda_t(\beta^o) - x_t B_T^o]' \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \frac{1}{h_t(\theta^o)} [\lambda_t(\beta^o) - x_t B_T^o]' \frac{\partial \psi_t(\beta^o)}{\partial \beta} \right] \sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta^o) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \frac{\psi_t(\beta^o)}{h_t(\theta^o)} \left[ \frac{\partial \lambda_t(\theta^o)}{\partial \theta} \right]' - [\lambda_t(\beta^o) - x_t B_T^o]' \frac{\psi_t(\beta^o)}{[h_t(\theta^o)]^2} \frac{\partial h_t(\theta^o)}{\partial \theta'} \right] \\
& \quad \times \sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^o) + o_p(1).
\end{aligned}$$

For the second term of the right hand side of (A.26),

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta^o) = O_p(1), \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \frac{1}{h_t(\theta^o)} [\lambda_t(\beta^o) - x_t B_T^o]' \frac{\partial \psi_t(\beta^o)}{\partial \beta} \right] = o_p(1),$$

by Lemmas 3 and 13, respectively. Hence the second term of the right hand side of (A.26) is  $o_p(1)$ .

For the third term of the right hand side of (A.26), Lemmas 14-16 indicate that

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \frac{\psi_t(\beta^o)}{h_t(\theta^o)} \left[ \frac{\partial \lambda_t(\theta^o)}{\partial \theta} \right]' - [\lambda_t(\beta^o) - x_t B_T^o]' \frac{\psi_t(\beta^o)}{[h_t(\theta^o)]^2} \frac{\partial h_t(\theta^o)}{\partial \theta'} \right] = o_p(1).$$

As  $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^o) = O_p(1)$  by Lemma 3 and Proposition 1, the third term of the right hand side of (A.26) is  $o_p(1)$ . With  $B_T^o = 0$  by Lemma 12,

$$\ddot{\zeta}_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\psi_t(\beta^o)}{h_t(\theta^o)} \lambda_t(\beta^o)' + o_p(1) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \zeta_t^o + o_p(1),$$

where  $\zeta_t^o$  is stated in Lemma 18. By Lemma 17, the covariance matrix of  $\ddot{\zeta}_T$  is positive definite for large  $T$ . Moreover,  $\ddot{\Omega}^{o-1/2} \ddot{\zeta}_T \xrightarrow{d} N(0, I_p)$  under  $H_0$  by Lemma 18. Thus,  $\ddot{\zeta}_T' \ddot{\Omega}^{o-1} \ddot{\zeta}_T \xrightarrow{d} \chi^2(p)$  under  $H_0$ . Applying Lemma 1 with  $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^o) = O_p(1)$ , which is obtained by Lemma 3 and Proposition 1, Lemma 19 ensures that  $\ddot{\Omega}_T$  is a consistent estimator of  $\ddot{\Omega}^o$ . Therefore,  $\ddot{\zeta}_T' \ddot{\Omega}_T^{-1} \ddot{\zeta}_T \xrightarrow{d} \chi^2(p)$  under  $H_0$ , which establishes Proposition 2.  $\square$



# Analyzing Sunspot Number via Gegenbauer Long Memory Process with Correlated Additive Noise\*

Manabu ASAI\*\*

**Abstract:** It is known that the sunspot number is well described by a Gegenbauer long memory process. Recent development on the field of time series analysis enable us to consider and estimate more flexible specification. The purposes of this paper are to extend the conventional specification for sunspot numbers to accommodate correlated additive noise and to estimate the new model by the Bayesian Markov chain Monte Carlo technique. The empirical result shows that the new specification improves the model fitness.

**Keywords:** Filtering; Kalman filter; Long Memory; State Space Models; Simulation Smoother; Sunspot Number.

## 1. Introduction

This paper analyzes Wolfer's yearly sunspot averages from 1749 to 1924. This data set is quite well known and can be found in Anderson (1971, Section 5.9 and Appendix A.3). Figure 1 shows the time series plot of the data set. Gray et al. (1989) and Chung (1996) estimated a generalized long memory model for the sunspot data:

$$(1 - \phi B)(1 - 2\kappa B + B^2)^d(y_t - \mu) = \eta_t,$$

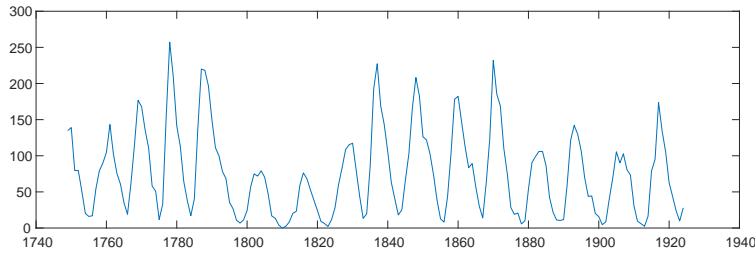
where  $\eta_t \sim N(0, \omega_{\eta\eta})$ . Following Gray et al. (1989), we refer to this as the GARMA(1, $d$ ,0) model. If  $\kappa = 1$ , the model reduces to the conventional ARFIMA(1,2 $d$ ,0). The power series of the function of  $(1 - 2\kappa z + z^2)^{-d}$  for  $|z| \leq 1$  and  $|\kappa| \leq 1$  is the Gegenbauer polynomials, and it enables the long memory structure to accommodate a periodic pattern. The periodic long memory is controlled by the Gegenbauer frequency, defined by  $\lambda_g = \cos^{-1}(\kappa)$ , implying a persistent cycle of  $2\pi/\lambda_g$ . The estimates of Gray et al. (1989) and Chung (1996) indicate that there is a persistent cycle of 11.2 years. As shown by Chung (1996), the maximum likelihood estimator of  $\kappa$  converges to the true value faster than do the other parameters, and it follows a non-standard distribution asymptotically.

---

\* The author is most grateful to Yoshi Baba for his valuable suggestions and comments.

\*\* Faculty of Economics, Soka University

Figure 1: Yearly Sunspot Averages



We reconsider the specification and estimate the model via the Bayesian Markov chain Monte Carlo technique. For this purpose, we introduce a correlated additive noise  $\varepsilon_t$  in the GARMA(1, $d$ ,0) model:

$$y_t = \mu + \alpha_t + \varepsilon_t, \quad \alpha_{t+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \eta_{t-k}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \Omega), \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{\varepsilon\varepsilon} & \omega_{\varepsilon\eta} \\ \omega_{\varepsilon\eta} & \omega_{\eta\eta} \end{pmatrix},$$

where

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k = (1 - \phi z)^{-1} (1 - 2\kappa z + z^2)^{-d}.$$

We consider three kinds of models: (i) the GARMA(1, $d$ ,0) model obtained by setting  $\omega_{\varepsilon\varepsilon} = \omega_{\varepsilon\eta} = 0$  in (1); (ii) the GARMA plus uncorrelated noise (GARMA+UncN) model with  $\omega_{\varepsilon\eta} = 0$ ; and (iii) the GARMA(1, $d$ ,0) plus correlated noise (GARMA+CorN) model. For estimating the new models via the Bayesian Markov chain Monte Carlo (MCMC) method, the paper uses the algorithm of Asai and So (2019) for evaluating the likelihood function.

The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 introduces the algorithm of Asai and So (2019) for long memory process with correlated additive noise. Section 3 shows the empirical results for the yearly averages of the sunspot number. Section 4 gives some concluding remarks.

## 2. Simulation Smoother for Long Memory Time Series with Correlated and Heteroskedastic Additive Noise

This paper introduces the simulation smoother for long memory time series with correlated and heteroskedastic additive noise, which was developed by Asai and So (2018), as their approach can be used for the Bayesian MCMC estimation of the three models.

## 2.1 General Framework

Let  $y_t$  be a  $p \times 1$  observable time series and  $\alpha_t$  be an  $m \times 1$  state vector. Assume that  $y_t$  is governed by the model:

$$y_t = d_t + Z_t \alpha_t + \varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$\alpha_{t+1} = c_t + \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k \eta_{t-k}, \quad \Psi_0 = I_m, \quad (3)$$

where  $c_t$  ( $m \times 1$ ),  $d_t$  ( $p \times 1$ ), and  $Z_t$  ( $p \times m$ ) are predetermined, and  $(\varepsilon_t', \eta_t')'$  is a Gaussian random vector defined by:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \Omega_t), \quad \Omega_t = \begin{pmatrix} \Omega_{\varepsilon\varepsilon,t} & \Omega'_{\eta\varepsilon,t} \\ \Omega_{\eta\varepsilon,t} & \Omega_{\eta\eta,t} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

allowing correlation in the noise  $\varepsilon_t$  and  $\eta_t$  and heteroskedasticity in the state variable  $\alpha_t$  via the predetermined positive-definite matrix  $\Omega_t$ . The state vector  $\alpha_t$  may follow a vector long memory process with the heteroskedastic disturbance. The model construction in (2) to (4) extends the time series with additive noise model in So (1999). Specifically, when  $\Omega_{\eta\varepsilon,t} = \mathbf{0}$  and  $\Omega_{\eta\eta,t} = \Omega_{\eta\eta}$ , the model reduces to the specification in So (1999). We assume  $\Omega_t = \Omega(t = 0, -1, -2, \dots)$ . Denote  $Y_{s:r} = (y_s', \dots, y_r')'$ .

The specification in (2) to (4) accommodates (i) a short and long memory process in  $\alpha_t$  via the infinite moving average representation and (ii) correlation and heteroskedasticity in the disturbance  $(\varepsilon_t', \eta_t')'$ . For a short memory process with (ii), Fruhwirth-Schnatter (1994), Carter and Kohn (1994), de Jong and Shephard (1995), Durbin and Koopman (2002) developed the Gaussian simulation smoother. For a long memory process with uncorrelated additive noise, So (1999) developed a simulation smoother, applying the Choleski decomposition of the covariance matrix of  $Y_{1:n}$ . To extend the work of So (1999), Asai and So (2019) consider the Choleski decomposition of the covariance matrix of state vectors corresponding to  $Y_{1:n}$ . The main contribution of this paper is to derive filtering equations, predictive densities and a simulation smoother for state vectors under the general model in (2) to (4). On top of the classical filtering, prediction and smoothing (Harvey, 1989) in the state space modeling perspective, as an application, we can draw samples of state vectors conditional on the observations and all other parameters in the model for Bayesian inference.

## 2.2 Alternative Representation

To extend the approach of So (1999), Asai and So (2019) derived an alternative representation based on the Choleski decomposition. Define

$$\beta_{t+1} = c_t + \sum_{k=0}^t \Psi_k \eta_{t-k}, \quad \gamma_{t+1} = \sum_{k=t+1}^{\infty} \Psi_k \eta_{t-k}, \quad (5)$$

to decompose the latent process as  $\alpha_t = \beta_t + \gamma_t$ . Denote the covariance matrix of  $\beta = (\beta_1', \dots, \beta_n')'$  and  $\gamma = (\gamma_1', \dots, \gamma_n')'$  by  $\Gamma^\beta$  and  $\Gamma^\gamma$  respectively. Assume that  $\Gamma^\beta$  and  $\Gamma^\gamma$  are finite. Then the Choleski decomposition of the covariance matrices are given by  $\Gamma^\beta = L^\beta M^\beta (L^\beta)'$  and  $\Gamma^\gamma = L^\gamma M^\gamma (L^\gamma)'$ . In the decomposition,  $L^h$  ( $h = \beta, \gamma$ ) is a block lower triangular matrix with the  $(i, j)$ th block given by  $L_{i,j}^h$  ( $m \times m$ ), and  $M^h$  is a block diagonal matrix with  $m \times m$  matrix elements  $M_i^h$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). By the definition in (5) and the Choleski decomposition, the  $(i, j)$ th block of  $\Gamma^\beta$  and  $\Gamma^\gamma$  are given by

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j}^\beta &= \text{cov}(\beta_i, \beta_j) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)-1} \Psi_{i-k-1} \Omega_{\eta\eta,k} \Psi_{j-k-1}' = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{i,k}^\beta M_k^\beta (L_{j,k}^\beta)', \\ \Gamma_{i,j}^\gamma &= \text{cov}(\gamma_i, \gamma_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{i+k} \Omega_{\eta\eta} \Psi_{j+k}' = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{i,k}^\gamma M_k^\gamma (L_{j,k}^\gamma)', \end{aligned} \quad (6)$$

respectively. Since  $\beta$  and  $\gamma$  are uncorrelated, the covariance matrix of  $\alpha = (\alpha_1', \dots, \alpha_n')'$  is given by  $\Gamma^\alpha = \Gamma^\beta + \Gamma^\gamma$ . It is obvious from (6) that  $L_{i,j}^\beta = \Psi_{i-j}$  ( $i \geq j$ ) and  $M_i^\beta = \Omega_{\eta\eta, i-1}$  for  $\beta$ . Regarding  $\gamma$ , we can introduce an uncorrelated process  $e_t$  with mean zero and covariance matrix  $M_{t+1}^\gamma$ , to have the correlation structure of  $\beta$ . By the structure of  $\gamma_t$ , the covariance matrix between  $(\varepsilon_t', \eta_t')'$  and  $e_t$  is a matrix of zeros.

Then, Asai and So (2019) give an alternative representation of (2) to (4), as:

$$y_t = d_t + Z_t(\beta_t + \gamma_t) + \varepsilon_t, \quad \beta_{t+1} = c_t + \sum_{k=1}^t L_{t,k}^\beta \eta_{t-k+1}, \quad \gamma_{t+1} = \sum_{k=1}^t L_{t,k}^\gamma e_{t-k+1}, \quad (7)$$

where  $(\varepsilon_t', \eta_t', e_t')' \sim N(\mathbf{0}, \Omega_t^*)$  and  $\Omega_t^* = \begin{pmatrix} \Omega_t & O \\ O & M_{t+1}^\gamma \end{pmatrix}$ .

For convenience, define  $G_t^* = [G_t \ O]$  ( $p \times (p + 2m)$ ),  $H_t^{\eta*} = [H_t \ O]$  ( $m \times (p + 2m)$ ), and  $H_t^{e*} = [O \ (M_{t+1}^\gamma)^{1/2}]$  ( $m \times (p + 2m)$ ), where  $G_t$  ( $p \times (p + m)$ ) and  $H_t$  ( $m \times (p + m)$ ) are the first  $p$  rows and the second  $m$  rows of  $\Omega_t^{1/2}$ , respectively. Then we obtain

$$\Omega_t^* = \begin{pmatrix} \Omega_t & O \\ O & M_{t+1}^\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_t^* \\ H_t^* \end{pmatrix} ((G_t^*)' (H_t^*)'), \quad H_t^* = \begin{pmatrix} H_t^{\eta*} \\ H_t^{e*} \end{pmatrix},$$

and yield  $\varepsilon_t = G_t^* u_t$ ,  $\eta_t = H_t^{\eta*} u_t$ , and  $e_t = H_t^{e*} u_t$ .

### 2.3 Filtering Equations and Predictive Densities

As in the Kalman filter, Asai and So (2019) derived the predictive distributions,  $p(\beta_{t+1}|Y_{1:t})$ ,  $p(\gamma_{t+1}|Y_{1:t})$  and  $p(\alpha_{t+1}|Y_{1:t})$ , which have the Gaussian distributions with mean vectors and covariance matrices computed by past information. Denote the covariance matrix of  $Y_{1:n}$  as  $\Sigma$ , and we use the Choleski decomposition  $\Sigma = LML'$ . As in  $\Gamma^\beta$  and  $\Gamma^\gamma$ , the  $(i, j)$ th block of  $\Sigma$  gives  $\text{cov}(y_i, y_j)$ ,  $L$  is a block lower triangular matrix with the  $(i, j)$ th block given by  $L_{ij}$ , and  $M$  is a block diagonal matrix with elements  $M_i$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). We denote the predicted value of  $y_t$  as  $\tilde{y}_t = E(y_t|Y_{1:t-1})$ , and its error covariance as  $F_t = \text{cov}(y_t - \tilde{y}_t|Y_{1:t-1})$ .

Define  $\tilde{\beta}_{t|t-1} = E(\beta_t|Y_{1:t-1})$ ,  $\tilde{\gamma}_{t|t-1} = E(\gamma_t|Y_{1:t-1})$  and their error covariances  $P_{t|t-1}^\beta = \text{cov}(\beta_t - \tilde{\beta}_{t|t-1})$  and  $P_{t|t-1}^\gamma = \text{cov}(\gamma_t - \tilde{\gamma}_{t|t-1})$ . Here  $\tilde{\beta}_{t+1|t}$  and  $P_{t+1|t}^\beta$  ( $\tilde{\gamma}_{t+1|t}$  and  $P_{t+1|t}^\gamma$ ) are the mean and covariance matrix of the Gaussian predictive density  $p(\beta_{t+1}|Y_{1:t})$  ( $p(\gamma_{t+1}|Y_{1:t})$ ) respectively. We derive the following filtering equations to recursively calculate  $\tilde{y}_{t|t-1}$  and  $F_t$ :

$$v_t = y_t - \tilde{y}_{t|t-1}, \quad \tilde{y}_{t|t-1} = d_t + Z_t a_{t|t-1} \quad F_{t+1} = Z_{t+1}(P_{t+1|t}^\beta + P_{t+1|t}^\gamma)Z_{t+1}' + G_{t+1}G_{t+1}', \quad (8)$$

$$\tilde{\beta}_{t+1|t} = c_t + \sum_{j=1}^t \Xi_{t,j}^\beta v_{t+1-j}, \quad P_{t+1|t}^\beta = \Gamma_{t+1,t+1}^\beta - \sum_{k=1}^t \Xi_{t,t-k+1}^\beta F_k (\Xi_{t,t-k+1}^\beta)', \quad (9)$$

$$\tilde{\gamma}_{t+1|t} = \sum_{j=1}^t \Xi_{t,j}^\gamma v_{t+1-j}, \quad P_{t+1|t}^\gamma = \Gamma_{t+1,t+1}^\gamma - \sum_{k=1}^t \Xi_{t,t-k+1}^\gamma F_k (\Xi_{t,t-k+1}^\gamma)', \quad (10)$$

where

$$\Xi_{t,t-j}^\beta = \left[ \left( \Gamma_{t+1,j+1}^\beta - \sum_{k=0}^{j-1} \Xi_{t,t-k}^\beta F_{k+1} (\Xi_{t,j-k}^\beta)' \right) Z_{j+1}' + \Psi_{t-j-1} H_{j+1} G_{j+1}' \right] F_{j+1}^{-1}, \quad (11)$$

$$\Xi_{t,t-j}^\gamma = \left( \Gamma_{t+1,j+1}^\gamma - \sum_{k=0}^{j-1} \Xi_{t,t-k}^\gamma F_{k+1} (\Xi_{t,j-k}^\gamma)' \right) Z_{j+1}' F_{j+1}^{-1}.$$

With the initial condition  $\tilde{\beta}_{1|0} = c_0$ ,  $P_{1|0}^\beta = \Gamma_{11}^\beta = \Omega_{\eta\eta}$ ,  $\tilde{\gamma}_{1|0} = 0$ ,  $P_{1|0}^\gamma = \Gamma_{11}^\gamma = M_1^\gamma$ , we calculate all predictive vectors and matrices in the sequence,  $\{P_{1|0}^\beta, P_{1|0}^\gamma\}$ ,  $F_1$ ,  $\{\Xi_{11}^\beta, \Xi_{11}^\gamma\}$ ,  $\{P_{2|1}^\beta, P_{2|1}^\gamma\}$ ,  $F_2$ ,  $\{\Xi_{22}^\beta, \Xi_{22}^\gamma\}$ ,  $\{\Xi_{21}^\beta, \Xi_{21}^\gamma\}$ ,  $\{P_{3|2}^\beta, P_{3|2}^\gamma\}$ ,  $F_3, \dots$ . As pointed out by So (1999), the algorithm is closely related to the standard Choleski decomposition. It is not difficult to verify that  $L_{t+1,k+1}$  and  $M_t$ , obtained from the Choleski decomposition of  $\Sigma$ , are related to  $\Xi_{t,t-k}^\beta$ ,  $\Xi_{t,t-k}^\gamma$ , and  $F_t$  according to the relationships  $L_{t+1,k+1} = Z_{t+1}(\Xi_{t,t-k}^\beta + \Xi_{t,t-k}^\gamma)$  and  $M_t = F_t$ .

For the original model (2)-(4), we obtain  $\tilde{\alpha}_{t|t-1} = E(\alpha_t|Y_{1:t-1}) = \tilde{\beta}_{t|t-1} + \tilde{\gamma}_{t|t-1}$  and  $P_{t|t-1} = \text{cov}(\alpha_t - \alpha_{t|t-1}) = P_{t|t-1}^\beta + P_{t|t-1}^\gamma$ , as  $\beta_t$  and  $\gamma_t$  are uncorrelated. Here,  $\tilde{\alpha}_{t+1|t}$  and  $P_{t+1|t}$  are the mean and covariance

matrix of the Gaussian prediction density  $p(\alpha_{t+1}|Y_{1:t})$ . Furthermore, if  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $\Omega_i$ ,  $\Gamma_{i,j}^\beta$ , and  $\Gamma_{i,j}^\gamma$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n+s$ ) are known, we only need to iterate (8)-(11) to obtain the  $s$ -step-ahead forecast and its error covariance:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{n+s|n} &= c_{n+s} + \sum_{j=1}^{n+s-1} \left( \Xi_{n+s-1,j}^\beta + \Xi_{n+s-1,j}^\gamma \right) v_{n+s-j}, \\ P_{n+s|s} &= \left( \Gamma_{n+s,n+s}^\beta + \Gamma_{n+s,n+s}^\gamma \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{s-1} \left( \Xi_{n+s-1,s-k}^\beta F_{n+k} (\Xi_{n+s-1,s-k}^\beta)' + \Xi_{n+s-1,s-k}^\gamma F_{n+k} (\Xi_{n+s-1,s-k}^\gamma)' \right),\end{aligned}$$

for the Gaussian predictive density of  $p(\alpha_{n+s}|Y_{1:n})$ .

## 2.4 Simulation Smoother

For the estimation of the state variable  $\alpha$  using the observations  $Y_{1:n}$ , Asai and So (2019) derived the mean and covariance matrix of the Gaussian distribution  $p(\alpha|Y_{1:n})$ . To perform Bayesian inference of the class of models such as long memory stochastic volatility models with asymmetric effects, Asai and So (2019) also proposed a simulation smoother for sampling from the distribution  $p(\alpha|Y_{1:n})$ . As in de Jong and Shephard (1995) and So (1999) among others, Asai and So (2019) consider sampling from  $p(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n|Y_{1:n})$  and  $p(\eta_1, \dots, \eta_n|Y_{1:n})$  rather than  $p(\alpha|Y_{1:n})$  directly to develop a Gaussian simulation smoother for the model (2)-(4). For this purpose, define  $\delta_t = \Delta_t u_t$ , where  $\Delta_t$  is matrix to transform  $u_t$  to  $\delta_t$ . The Gaussian simulation smoother of Asai and So (2019) is based on the decomposition  $p(\delta_1, \dots, \delta_n|Y_{1:n}) = p(\delta_n|Y_{1:n}) \prod_{t=1}^{n-1} p(\delta_t|Y_{1:n}, \delta_{t+1}, \dots, \delta_n)$ . If  $\Delta_t = G_t^*$  or  $\Delta_t = H_t^*$ , the sampled  $\delta_t$  corresponds to the measurement noise  $\varepsilon_t$  or state noise  $(\eta_t', e_t')'$  respectively. For instance, set  $\Delta_t = H_t^*$  for sampling  $\{\alpha_t\}$  and use the draws of  $(\eta_t', e_t')' = H_t^* u_t$  given  $Y_{1:n}$ , to plug in to equation (7).

For the simulation smoother, Asai and So (2019) first obtained the Choleski quantities  $L_{ij} = Z_t(\Xi_{i-1,i-j}^\beta + \Xi_{i-1,i-j}^\gamma)$  ( $i \geq j$ ), the prediction errors  $v_t$ , and its error covariance  $F_t$  via the filtering equations in section 2.3. Then, we calculate  $E_{t,s}$ ,  $W_{t,s}$ , and  $C_t$ , and draw  $\xi_t$  from  $N(0, C_t)$ , where

$$E_{t,t} = \Delta_t G_t^{*'} \quad E_{t,s} = \Delta_t H_t^{*'} (\Psi_{s,t+1}^{\beta\gamma})' Z_s' - \Delta_t G_t^{*'} L_{s,t}' - \sum_{j=t}^{s-2} E_{t,j+1} L_{s,j+1}' \quad (s = t+1, \dots, n), \quad (12)$$

$$W_{t,s} = -E_{t,s} F_s^{-1} G_s^* \Delta_s' - \sum_{k=s+1}^n \{ E_{t,k} F_k^{-1} E_{s,k}' + W_{t,k} C_k^{-1} W_{s,k}' \}, \quad (13)$$

$$C_t = \Delta_t \Delta_t' - \Delta_t G_t^{*'} F_t^{-1} G_t^* \Delta_t' - \sum_{k=t+1}^n \{ E_{t,k} F_k^{-1} E_{t,k}' + W_{t,k} C_k^{-1} W_{t,k}' \}, \quad (14)$$

with  $\Psi_{s,t+1}^{\beta\gamma} = [\Psi_{s-t-1} \ L_{s,t+1}^{\gamma}]$ . We evaluate  $W_{t,s}$  and  $C_t$  by iterating between (13) and (14) according to the sequence

$$C_n; \quad W_{n-1,n}, C_{n-1}; \quad W_{n-2,n}, W_{n-2,n-1}, C_{n-2}; \quad W_{n-3,n}, W_{n-3,n-1}, W_{n-3,n-2}, C_{n-3}; \quad \dots$$

Finally, we set

$$\delta_t = \xi_t + \left[ \Delta_t G_t^{*'} F_t^{-1} v_t + \sum_{s=t+1}^n \{ E_{t,s} F_s^{-1} v_s + W_{t,s} C_s^{-1} \xi_s \} \right].$$

Asai and So (2019) showed that  $\delta$  is a sample from  $p(\delta | Y_{1:n})$ , where  $\delta = (\delta_0^l, \delta_1^l, \dots, \delta_n^l)$ .

### 3 Empirical Results

For the alternative representation in (7), we evaluate  $\Gamma_{ij}$  via a fast algorithm developed by McElroy and Holan (2012). We use the new filtering algorithm to evaluate the log-likelihood function, excluding the constant, as:

$$\log L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\log F_t + v_t^2 / F_t).$$

It should be noted that we are unable to use the adjusted version of Durbin's algorithm (Doornik and Ooms 2003) for the likelihood evaluation because the model contains the correlated disturbances as in (1). Since the maximum likelihood estimator of  $\kappa$  is expected to follow the non-standard distribution, we use the Bayesian approach rather than maximum likelihood estimation.

We assume the prior distribution as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa + 1}{2} &\sim \text{Beta}(\kappa_1, \kappa_2), \quad d + \frac{1}{2} \sim \text{Beta}(d_1, d_2), \quad \frac{\phi + 1}{2} \sim \text{Beta}(\phi_1, \phi_2), \\ \mu &\sim N(\mu_0, \sigma_\mu^2), \quad \Omega^{-1} \sim W(\nu_1, S_1), \end{aligned}$$

with hyper-parameters,  $\kappa_1 = 20$ ,  $\kappa_2 = 1.5$ ,  $d_1 = 10$ ,  $d_2 = 1.5$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = 2$ ,  $\mu_0 = 70$ ,  $\sigma_\mu^2 = 25$ ,  $\nu_1 = 5$ , and  $S_1 = 0.05 I_2$ . For sampling parameters, we use the Delayed Rejection & Adaptive Metropolis (DRAM) algorithm of Haario et al. (2006). The DRAM algorithm combines two ideas in the MCMC literature: adaptive Metropolis samplers (Haario et al. 1999, 2001; Chen and So 2006) and delayed rejection (Tierney and Mira 1999; Green and Mira 2001; Mira 2001). The adaptive Metropolis sampler is based on the idea of creating a Gaussian proposal distribution with a covariance matrix calibrated using the sample path of the MCMC chain. The basic idea of the delayed rejection is that, upon rejection in a Metropolis-Hastings algorithm, instead of advancing time and retaining the same position, a higher stage move is proposed to improve the efficiency of the resulting

Table 1: MCMC Estimates of GARMA Models for the Number of Sunspots

Parameter	GARMA	GARMA+UncN	GARMA+CorN
$\kappa$	0.7466 (0.5181, 0.9810)	0.8307 (0.7635, 0.8834)	0.8090 (0.6890, 0.9032)
$d$	0.2476 (0.0178, 0.4802)	0.3938 (0.2628, 0.4887)	0.3423 (0.1555, 0.4784)
$\phi$	0.0172 (-0.9098, 0.9141)	0.6030 (0.3158, 0.8506)	0.4554 (0.0445, 0.8035)
$\mu$	79.8164 (61.5412, 98.5356)	72.3289 (57.4759, 86.9253)	71.6394 (53.5764, 88.1616)
$\omega_{\varepsilon\varepsilon}$	—	58.912 (5.6297, 180.74 )	324.39 (15.273, 936.98)
$\omega_{\varepsilon\eta}$	—	—	489.92 (-44.000, 1246.3)
$\omega_{\eta\eta}$	2895.8 (4.8562, 9278.5)	632.12 (352.13, 1002.97)	1212.9 (498.39, 2272.8)
LL	-906.934	-820.509	-812.925
DIC	1868.49	1676.00	1500.53

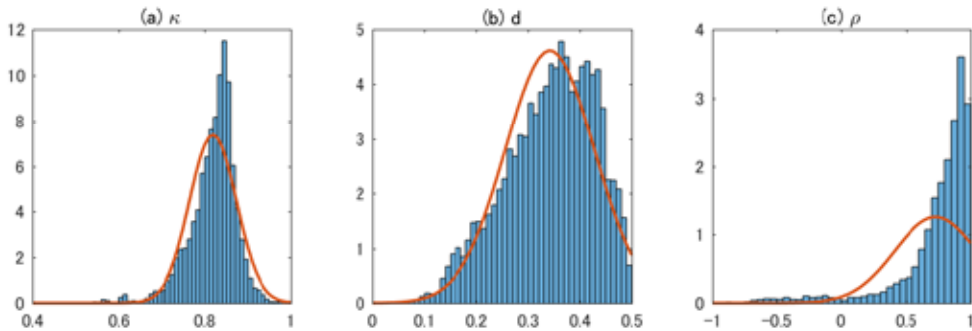
Note: The entry shows the posterior mean, while 95% credible intervals are shown in parentheses. ‘LL’ denotes the log-likelihood function evaluated at the posterior mean.

MCMC estimators. By the DRAM algorithm, we generate parameters from their full conditional distributions.

We conduct MCMC simulation with 20,000 iterations. The first 10,000 draws are discarded, and then the next 10,000 are recorded. We compare the three models by the deviance information criterion (DIC) of Spiegelhalter et al. (2002). Table 1 indicates that the GARMA+CorN model has the smallest DIC. Table 1 also shows the posterior mean estimates and 95% credible intervals for the three models. The three models yield similar results for the parameters,  $\kappa$ ,  $d$ , and  $\mu$ , while the sample of  $d$  of the GARMA model is different from the other two.

For the GARMA+CorN model, Figure 2 shows the normalized histograms of samples from posterior distributions of  $\kappa$ ,  $d$ , and  $\rho$ , where  $\rho = \omega_{\varepsilon\eta} / \sqrt{\omega_{\varepsilon\varepsilon}\omega_{\eta\eta}}$ . These distributions are skewed to the

Figure 2: Histogram of Samples from Posterior Distributions



Note: The red lines show the corresponding normal distributions based on the sample mean and variance.



left. Among the three distributions, the histogram of  $d$  is closest to the normal distribution. On the contrary, the histograms of  $\kappa$  and  $\rho$  are far from the normal distributions. The distributions of  $\kappa$  and  $d$  indicate the appropriateness of introducing  $\kappa$  in the long memory process. Furthermore, the samples of  $\rho$  has a mass around 0.9, and this result indicates the appropriateness of accommodating correlations in the disturbances.

#### 4. Conclusion

In this paper, we consider a Gegenbauer long memory model with correlated additive noise for analyzing yearly sunspot numbers. Based on the filtering algorithm of Asai and So (2019), we estimated the new model via the Bayesian MCMC technique. The estimates indicates that the model fit is improved by the correlated additive noise.

#### References

- Anderson, T. W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*, New York: Wiley.
- Asai, M. and M.K.P. So (2019), "A Simulation Smoother for Long Memory Time Series with Correlated and Heteroskedastic Additive Noise", to appear in *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, DOI: 10.1080/03610918.2018.1554120.
- Carter, C. K. and R. Kohn (1994), "On Gibbs Sampling for State Space Models", *Biometrika*, **81**, 541-553.
- Chen, C. W. S., and M.K.P. So (2006), "On a Threshold Heteroscedastic Model", *International Journal of Forecasting*, **22**, 73-89.
- Chung, C. F. (1996). "A Generalized Fractionally Integrated Autoregressive Moving-Average Process", *Journal of Time Series Analysis*, **17**, 111-140.
- de Jong, P. and N. Shephard (1995), "The Simulation Smoother for Time Series Models", *Biometrika*, **82**, 339-50.
- Doornik, J. A., and M. Ooms (2003), "Computational Aspects of Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average Models", *Computational Statistics & Data Analysis*, **42**, 333-348.
- Durbin, J. and D. J. Koopman (2002), "A Simple and Efficient Simulation Smoother for State Space Time Series Analysis", *Biometrika*, **89**, 603-616.
- Fruhworth-Schnatter, S. (1994), "Data augmentation and dynamic linear models", *Journal of Time Series Analysis*, **15**, 183-202.
- Gray, H. L., N. Zhang, W. A. Woodward (1989), "On Generalized Fractional Processes", *Journal of Time Series Analysis*, **10**, 233-257.
- Green, P. J. and A. Mira (2001), "Delayed Rejection in Reversible Jump Metropolis-Hastings", *Biometrika*, **88**, 1035-1053.
- Haario, H., M. Laine, A. Mira, and E. Saksman (2006), "DRAM: Efficient Adaptive MCMC", *Statistics and Computing*, **16**, 339-354.
- Haario H., E. Saksman, and J. Tamminen (1999), "Adaptive Proposal Distribution for Random Walk Metropolis Algorithm", *Computational Statistics*, **14**, 375-395.
- Haario H., E. Saksman, and J. Tamminen (2001), "An adaptive Metropolis algorithm", *Bernoulli*, **7**, 223-242.
- Harvey, A. C. (1989), *Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.
- McElroy, T. S. and S. H. Holan (2012), "On the Computation of Autocovariances for Generalized Gegenbauer Processes", *Statistica Sinica*, **22**, 1661-1687.

- Mira A. (2001), "On Metropolis-Hastings Algorithms with Delayed Rejection", *Metron*, **59**, 231-241.
- So, M.K.P. (1999), "Time Series with Additive Noise", *Biometrika*, **86**, 474-482.
- Spiegelhalter, D. J., N. G. Best, B. P. Carlin, and A. van der Linde (2002), "Bayesian measures of model complexity and fit" (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **64**, 583-639.
- Tierney L. and A. Mira (1999), "Some Adaptive Monte Carlo Methods for Bayesian Inference", *Statistics in Medicine*, **18**, 2507-2515.

# The Effect of Role Origin on Bidding Behavior in an Asymmetric All-Pay Auction: An Experiment<sup>†</sup>

Hironori OTSUBO<sup>‡</sup>

**Abstract:** This paper reports the results of an experiment concerning whether different origins of bidder role affect bidding behavior in the two-person all-pay auction in which ties are broken in favor of one role (strong bidder) over the other (weak bidder). Two role allocation procedures are compared. In the first one, the roles are allocated at random. In the second one, the roles are allocated based on their performance in a simple real-effort task. The data provided no evidence to confirm the effect of role origin on bidding behavior in the current asymmetric all-pay auction.

**Keywords:** Role Origin; Asymmetric All-Pay Auction; Gender; Experiment

**JEL Classification:** C92, C72

## 1. Introduction

In experimental economics randomization is a commonly used technique in order to ensure each subject an equal chance of being assigned to each of different roles, such as advantageous and disadvantageous roles. However, there are two potential issues about this common practice. First, randomization may undermine external validity. A casual observation suggests that the right to become an advantageous role is not always obtained by luck but often by prior efforts or skills.<sup>1</sup> Second, and more importantly, how people behave may be sensitive to how they obtain roles. For example, Hoffman et al. (1994) detected the possibility that role origin matters in economic decision-making situations. They conducted the ultimatum game experiment in which the right to become the proposer role was allocated either by luck or by the score on a general knowledge quiz.

---

<sup>†</sup> This paper is dedicated to Professor Kunio Kama on the occasion of his retirement from Soka University. Generous financial support from Soka University is gratefully acknowledged.

<sup>‡</sup> Associate Professor, Faculty of Economics, Soka University.

<sup>1</sup> For example, consider the election contest in which two candidates, an incumbent and a challenger, are running for office. Even if they are expected to divide the vote evenly, the incumbent would end up with an election victory due to officeholder benefits, such as greater name recognition and voters' status-quo bias. To establish the right to enjoy officeholder benefits, the incumbent usually has to exert substantial prior efforts; he has to accumulate more experience in office, engage in fundraising events, and make his presence felt among his constituents.

They found that the latter case induced the proposers to significantly lower their proposals.

The proposer is known to be in the stronger position as previous experimental research on ultimatum games shows that the proposer tends to earn 50% to 70% of the pie. The finding of Hoffman et al. (1994) hints that the earned right to be in an advantageous position may serve to legitimize the right to exploit its advantages even more. Then, a natural question is whether this finding can be replicated in other economic decision-making situations where role differences are clearly defined, such as asymmetric competitions.

This paper reports on an experiment designed to explore the effect of role origin on bidding behavior in the two-person all-pay auction in which one role (strong bidder) is more advantageous than the other (weak bidder). Role origin refers to the procedure that allocates the two bidder roles to subjects. The experiment consists of two treatments. In one treatment, subjects compete in a simple real-effort task in order to secure the advantageous role in the auction. In the other treatment, the two roles are allocated randomly.

The current experiment is designed in that in theory bidders' bidding strategies remain the same between the treatments; subjects should bid according to the same mixed strategy. However, the effect of role origin, if such exists, may induce subjects to bid differently in the earned treatment. For example, a subject earning the strong bidder role by effort forms a feeling of entitlement to the prize and a subject in the weak bidder role respects the opponent's exerted effort. Then, both bidder roles may bid non-competitively.<sup>2</sup>

The paper proceeds as follows. Section 2 presents a model of the two-person asymmetric all-pay auction and its unique equilibrium solution. Section 3 describes an experiment to examine the effect of role origin on bidding behavior in the all-pay auction. Section 4 summarizes the results. Section 5 concludes.

## 2. Model

Risk-neutral strong and weak bidders, indexed by  $s$  and  $w$ , compete over a single, indivisible prize  $v$ . Its valuation is the same for both bidders. Each bidder independently chooses a bid  $b_i$ ,  $i \in \{s, w\}$ , from the common discrete strategy space  $B = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, c\}$ , where  $\varepsilon > 0$  and  $c$  is the common bid cap.  $v$  and  $c$  are assumed to be multiples of  $\varepsilon$  such that  $v > c > \varepsilon$ .<sup>3</sup>

Ties are broken asymmetrically; the strong bidder wins the prize if  $b_s \geq b_w$ , and the weak bidder

2 It is well known in the theoretical literature of contests that when asymmetry between contestants is sufficiently large, they expend their resources non-competitively. This phenomenon is called the *discouragement effect* (Konrad, 2009). In the current setting, however, theory suggests that this phenomenon does not occur.

3 Otsubo (2015) characterized a complete set of Nash equilibrium in mixed strategies for the model with no binding bidding cap. In a sharp contrast to the current model, there exist both a unique symmetric equilibrium and a continuum of asymmetric equilibria.

wins it otherwise. Thus, the weak bidder has to outbid the strong bidder. Their payoff functions are given as follows:

$$\pi_s(b_s, b_w) = \begin{cases} v - b_s & \text{if } b_s \geq b_w \\ -b_s & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\pi_w(b_w, b_s) = \begin{cases} v - b_w & \text{if } b_w > b_s \\ -b_w & \text{otherwise} \end{cases}$$

where  $\pi_i(\cdot)$  is bidder  $i$ 's payoff function. For any pure-strategy profile at least one bidder has an incentive to unilaterally deviate her strategy, no pure-strategy equilibrium exists.

In the mixed extension of the game, denote by  $(\sigma_s, \sigma_w)$  a profile of mixed strategies, where  $\sigma_i$  is bidder  $i$ 's mixed strategy, i.e., a probability distribution over  $B$ , and  $\sigma_i(b)$  is the probability assigned by  $\sigma_i$  to a pure strategy  $b \in B$ . Then, there exists a unique equilibrium in mixed strategies  $(\sigma_s^*, \sigma_w^*)$  characterized by

$$\sigma_s^*(b) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{v} & \text{if } b \in \{0, \dots, c - \varepsilon\} \\ 1 - \frac{c}{v} & \text{if } b = c \end{cases}$$

and

$$\sigma_w^*(b) = \begin{cases} 1 - \frac{c}{v} & \text{if } b = 0 \\ \frac{\varepsilon}{v} & \text{if } b \in [\varepsilon, \dots, c] \end{cases}$$

with equilibrium payoffs  $v - c$  for the strong bidder and 0 for the weak bidder.<sup>4</sup> In equilibrium, the expected bids are  $c - \frac{c(c+\varepsilon)}{2v}$  for the strong bidder and  $\frac{c(c+\varepsilon)}{2v}$  for the weak bidder, respectively. Thus, the expected sum of the bids is always equal to  $c$ . The probability that the strong bidder wins the prize is  $1 - c \frac{(c+\varepsilon)}{2v^2}$ , which is larger than 0.5. Due to the unfair tie-breaking rule, the strong bidder always has a higher chance of winning the prize than the weak bidder.

### 3. Experiment

#### 3.1 Design

There were two treatments in the experiment. In the random treatment, strong and weak bidder roles were randomly allocated in that half of the subjects played the strong bidder role and the remaining subjects played the weak bidder role. In the earned treatment, on the other hand, the two roles were allocated according to their performance in a simple real-effort task similar to the counting zeros task introduced by Abeler et al. (2011). There were 20 questions in this task,

---

<sup>4</sup> The proof is available upon request.

each of which consists of about 200 integers ranging from 0 to 9. Subjects were given six minutes to count zeros in these questions. They were ranked based on the number of questions they answered correctly and then divided into two equal-size groups, the high score group and the low score group. Subjects in the former group played the strong bidder role, whereas those in the latter group played the weak bidder role.

The same set of parameter values was adopted in both treatments;  $c = 800$ ,  $v = 1000$ , and  $\varepsilon = 200$ .<sup>5</sup> In equilibrium both bidders use the same mixed strategy that assigns probability 0.2 to each of the bids 0, 200, 400, 600, and 800. The probability that the strong bidder wins the prize is 0.6.<sup>6</sup> Their expected bids are equal to 400.

One may notice that both bidders can assure their equilibrium payoffs by choosing their maximin strategies, namely 800 for the strong bidder and 0 for the weak bidder. The current all-pay action belongs to a class of *unprofitable games* (Harsanyi, 1966); games in which maximin strategies do not coincide with the unique equilibrium strategies, yet yield the same payoff as the equilibrium strategies. Several game theorists conjectured that the unprofitability of the equilibrium undermines its plausibility as a predictor (for example, Harsanyi, 1966; Aumann and Maschler, 1972).

The extent to which a subject is willing to undertake such a risky mixed strategy depends on the subject's risk attitude. Suppose that the strong bidder chooses his maximin strategy, he will earn a sure payoff of 200. If his bid falls to, say 600, his potential payoff rises to 400, but whether or not he will receive this payoff relies on what the weak bidder does. In the presence of such strategic uncertainty, he would form a belief that the probability of getting this payoff is less than one. A risk-loving strong bidder would still be willing to choose a lower bid, whereas a risk-averse strong bidder would bid 800 for a sure payoff of 200. By the similar argument, a risk-loving weak bidder would be willing to bid higher, whereas a risk-averse weak bidder would bid 0. It is of particular importance to measure subjects' risk attitudes in order to interpret the all-pay auction data. Therefore, prior to playing the all-pay auction, subjects were given a simple lottery choice task inspired by Holt and Laury (2002) for elicitation of subjects' risk preferences.

### 3.2 Procedures

A total of seventy-six undergraduate students from various majors enrolled at Soka University in Tokyo, Japan, were recruited from an online bulletin board on the university's portal site. Thirty-six of them participated in the random treatment and the rest the earned treatment. The numbers of males and females participated in the experiment were 53 and 23, respectively. These treatments

<sup>5</sup> The currency unit of these values is Japanese Yen. When the experiment was conducted, the USD/JPY currency exchange rate ranged approximately from 108 yen to 109 yen.

<sup>6</sup> A tie occurs with probability 0.2.

had four sessions each, and no subject was allowed to take part in more than one session.<sup>7</sup> Each session lasted about 90 minutes, including instructions and payment.

Once all subjects were seated, they began to read instructions for Stage 1 silently at their own pace.<sup>8</sup> Then, an experimenter read the instructions aloud to induce their common knowledge. The experimenter answered questions individually.

In Stage 1, subjects were presented with a list of ten choice problems between a gamble with payoffs of 300 yen or 0 yen (called as “Option A”) and a certain payoff of 140 yen (called as “Option B”). Table 1 displays the ten paired lottery choice problems used in Stage 1. Subjects were instructed to state which option, A or B, they would prefer for each problem. The instructions clearly explained that the earnings of Stage 1 would be determined by playing one of the lottery choice problems drawn randomly at the end of the session. Notice that as moving down the table, the probability of the high payoff  $p_h$  in Option A decreases. Though everyone is expected to choose Option A in the 1st choice problem, when  $p_h$  becomes sufficiently low, subjects are expected to switch over to Option B. For example, a risk-neutral subject should cross over to Option B in the 7th choice problem whereas a risk-averse subject should switch to Option B before the 7th choice problem. At the end of Stage 1, subjects were asked to answer individual characteristics that may have an impact on risk preferences, such as gender (Croson and Gneezy, 2009), academic major, and the number of years attended at Soka University.

After completion of Stage 1, subjects were given new instructions for Stage 2 and asked to read the instructions silently at their own pace. Just as in Stage 1 the experimenter read the instructions aloud and answered questions individually. This stage began with assigning the two roles, the strong bidder (called as “Player A”) and the weak bidder (called as “Player B”), to subjects through

Problem No.	Option A	Option B
1	300 yen with probability 1, 0 yen with probability 0	140 yen
2	300 yen with probability 0.9, 0 yen with probability 0.1	140 yen
3	300 yen with probability 0.8, 0 yen with probability 0.2	140 yen
4	300 yen with probability 0.7, 0 yen with probability 0.3	140 yen
5	300 yen with probability 0.6, 0 yen with probability 0.4	140 yen
6	300 yen with probability 0.5, 0 yen with probability 0.5	140 yen
7	300 yen with probability 0.4, 0 yen with probability 0.6	140 yen
8	300 yen with probability 0.3, 0 yen with probability 0.7	140 yen
9	300 yen with probability 0.2, 0 yen with probability 0.8	140 yen
10	300 yen with probability 0.1, 0 yen with probability 0.9	140 yen

Table 1: The ten paired lottery choice problems in Stage 1

<sup>7</sup> Each session accommodated either 8 or 10 subjects.

<sup>8</sup> Instructions are available upon request.

one of two role assignment procedures described above. After role assignment, each subject was randomly paired with a subject of the opposite role. Subjects had no way of knowing the identity of their opponents. Before playing the auction game, subjects completed the quiz to make sure their understanding of the instructions.

Subjects played the auction game only once. Each subject received an endowment of 1000 yen and independently and simultaneously chose her bid, which had to be a multiple of 200 yen between 0 yen and 800 yen inclusive. After all subjects submitted their bids, the experimenter collected them and then privately informed each subject of whether or not she won and how much she earned in this stage.

At the end of the session, the experimenter determined the earnings for Stage 1 by using a bingo cage in front of subjects. The bingo cage contained 10 balls numbered from 1 to 10. The experimenter turned the bingo cage twice with replacement. The first draw determined which paired lottery choice problem to be selected for payment, and the second draw determined the outcome of Option A in the selected choice problem.<sup>9</sup> Then, the experimenter calculated the total earnings subjects had accumulated and paid them privately in cash. The average individual earnings were 1511 yen, including a show-up fee of 300 yen.<sup>10</sup>

### 3.3 Hypothesis

Differences in role origins do not alter the unique equilibrium, which serves to establish the following hypothesis.

**Hypothesis.** *Holding the player role constant, there is no difference in the bid distribution between the two role origins.*

## 4. Results

### 4.1 Lottery Choice Task (Stage 1)

This section begins with reporting results of the lottery choice task in Stage 1. It is worthwhile noting that three subjects who switched back and forth between the two options, as they moved down the problems in Table 1. Although these subjects stayed in the session until the end, their data were removed from the following analyses since their behavior is considered inconsistent. Therefore, the updated dataset includes only seventy-three subjects.

The proportions of Option A choices made by all subjects are shown by the solid line with

<sup>9</sup> Suppose that the first draw is seven and the second draw is four. This means that the seventh paired lottery choice problem will be selected for payment. Those who chose Option A will earn 300 yen and those who chose Option B will automatically earn 140 yen.

<sup>10</sup> The regional minimum hourly wage was 958 yen at the time of the experiment.



circles in the left panel of Figure 1, where the problem number is listed on the horizontal axis. The dash line with crosses represents the predicted behavior for a risk-neutral subject. As expected, all subjects were expected to choose Option A in the very first question. The proportion of Option A choices decreases in the problem number. That the solid line is above the dashed line for the questions 7-10 indicates the presence of risk-loving subjects. About 8% of the subjects never switched to Option B. The right panel of Figure 1 displays the proportions of Option A choices by gender. It shows that female subjects switched to Option B, i.e., safe choice, earlier than male subjects, which hints that male subjects are more risk-seeking than female subjects.

The problem numbers in which subjects switched from Option A to Option B can be used to estimate their risk aversion levels. Hereafter, assume that subjects were maximizing the expected value of the following CRRA utility function:

$$u(x) = \frac{x^{1-r}}{1-r} \quad (r \neq 1),$$

where  $x$  is the amount of money, and  $r$  is a relative risk aversion parameter. For each question, the value of this parameter can be determined by making the subject indifferent between Option A and Option B.<sup>11</sup>

To estimate the distribution of  $r$ , an interval regression model is employed.<sup>12</sup> To allow for heterogeneity regarding risk attitude, subject  $i$ 's relative risk aversion  $r_i$  is modeled as a linear function of three individual characteristic variables. The dummy variable  $male_i$  takes on the value 1

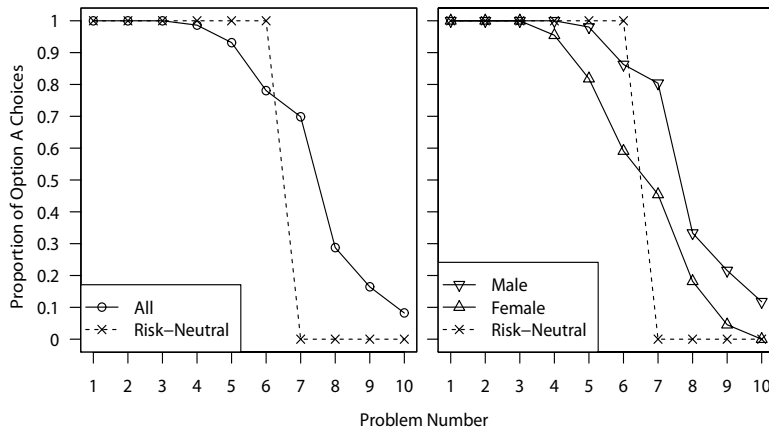


Figure 1: Proportion of Option A choices for each of the ten paired lottery choice problems

<sup>11</sup> For example,  $r = 0.707$  for the third question and  $r = 0.532$  for the fourth question. If the subject switched to Option B in the fourth question, her risk aversion parameter lies between 0.532 and 0.707. A subject is risk-averse if  $r > 0$ , risk-neutral if  $r = 0$ , and risk-seeking if  $r < 0$ .

<sup>12</sup> According to Harrison and Ruström (2008), an interval regression model was first proposed by Collier and Williams (1999) for a multiple price list (MPL) experimental task. The estimation technique in this subsection follows Chapter 6 of Moffatt (2015).

if subject  $i$  is male and 0 otherwise. The other dummy variable  $econ_i$  takes on the value 1 if subject  $i$  majors in Economics and 0 otherwise. The variable  $year_i$  is the number of years subject  $i$  attended Soka University. A model incorporating heterogeneity with respect to risk attitude is

$$r_i = x_i\beta + \eta_i,$$

where  $x_i = [1 \text{ } male_i \text{ } econ_i \text{ } year_i]$ ,  $\beta = [\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3]^T$ , and  $\eta_i \sim N(0, \sigma^2)$ . This model can be written as

$$r_i \sim N(x_i\beta, \sigma^2).$$

Suppose that subject  $i$ 's risk aversion parameter lies between a lower bound  $l_i$  and an upper bound  $u_i$ . Given  $r_i \sim N(x_i\beta, \sigma^2)$ , this event happens with probability

$$L_i = \Phi\left(\frac{x_i\beta - u_i}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i\beta - l_i}{\sigma}\right),$$

where  $\Phi(\cdot)$  is the cumulative distribution function of the standard normal distribution. Thus, the log-likelihood function can be written in the form of  $\sum_i \ln L_i$ .

Table 2 reports the maximum likelihood estimates of  $\beta$  and  $\sigma$ .<sup>13</sup> The variable *male* is significant, and its coefficient is negative. Neither *econ* nor *year* is significant at conventional levels of significance. These results confirm past experimental evidence that male subjects are significantly more risk-seeking than female subjects.<sup>14</sup>

	Coefficient	95% Confidence Interval
(Intercept)	0.218	[-0.280 0.714]
<i>male</i>	-0.491**	[-0.839 -0.147]
<i>econ</i>	0.187	[-0.137 0.514]
<i>year</i>	-0.064	[-0.197 0.067]
$\sigma$	0.674***	[0.570 0.812]
Log-likelihood: -162.32		
Number of observations: 73		

\*:  $p < 0.05$ , \*\*:  $p < 0.01$ , \*\*\*:  $p < 0.001$

Table 2: Maximum likelihood estimates of  $\beta$  and  $\sigma$

<sup>13</sup> R package *bbmle* includes *mle2()* function which was used to implement the maximum likelihood estimation of the interval regression model.

<sup>14</sup> For example, see Charness and Gneezy (2012).

#### 4.2 All-Pay Auction (Stage 2)

Table 3 presents the observed frequency distributions of bids separately in terms of role origin and role.<sup>15</sup> The mean bids differed for the Player A role (341.2 yen for the random treatment versus 260 yen for the earned treatment), whereas the mean bids were the same for the Player B role (177.8 yen for both treatments). To test the effect of role origin, the two observed frequency distributions of bids were compared separately for each player role. A permutation test of the two-sample Kolmogorov-Smirnov statistic failed to reject the null hypothesis of no difference for each player role at any conventional level of significance.<sup>16</sup> The data provided no evidence of the effect of role origin on bidding behavior.

A further inspection of the table reveals two other findings that defy the theoretical implications. First, the bid distributions are not uniform and rather right-skewed except the Player A's bid distribution in the random treatment. Consequently, their mean bids are clearly lower than the predicted mean bid of 400 yen. To formally compare the predicted and observed distributions, a one-sample discrete Cramér-von Mises goodness-of-fit test was invoked.<sup>17</sup> The rightmost column of Table 3 reports the results in terms of  $p$ -values. Only for the bid distribution of Player A subjects in the Random treatment did the test fail to reject the null hypothesis that the bids came from the discrete uniform distribution. Second, Player A subjects on average bid higher than Player B subjects. This finding seems to confirm a mild discouragement effect. However, neither of these differences was statistically significant; a two-tailed Wilcoxon rank-sum test failed to reject the null hypothesis of no difference in mean bid for each pairwise comparison.<sup>18</sup>

The analysis of Stage 1 confirmed the existence of gender difference in risk attitudes; male

15 In Stage 1 there were three subjects who switched back and forth between the two options as they moved down the problems in Table 1. Although these subjects stayed in the session until the end, their data were removed since their behavior is considered inconsistent. The updated dataset includes 51 males and 22 females.

16 The two-sample Kolmogorov-Smirnov test statistic was used to implement a permutation test of equal bid distributions. The observed test statistics were 0.2559 for the Player A role and 0.1667 for the Player B role. The test was done for the Player A role as follows. A sample of  $n = 17$  bids for the random treatment and a sample of  $m = 20$  bids for the earned treatment were pooled into one sample. Then, chose 17 bids out of the pooled sample at random to the random treatment without replacement. The remaining 20 bids were assigned to the earned treatment. The test statistic was computed based on this permutation resample. This permutation resampling was repeated 10000 times to form the permutation distribution of the statistic, i.e., the resampling distribution of the statistic under the null hypothesis. The  $p$ -value was estimated by locating the observed statistic on this distribution. A similar procedure was taken for the Player B role. The estimated  $p$ -values were 0.254 for Player A and 0.607 for Player B.

17 R package dgof includes the Cramér-von Mises goodness-of-fit test. For more information, see Arnold and Emerson (2011).

18 R package exactRankTests was used to perform the Wilcoxon rank-sum test. The  $p$ -values were 0.1713 for the random treatment and 0.5342 for the earned treatment, respectively.

Role Origin	Role	Bid (yen)					Mean	Median	<i>p</i> -value
		0	200	400	600	800			
Random	Player A	5	5	1	2	4	341.2	200	0.3522
	Player B	8	5	4	1	0	177.8	200	< 0.001
Earned	Player A	11	1	3	1	4	260	0	0.0101
	Player B	11	4	0	0	3	177.8	0	< 0.001

Table 3: Bid distribution by role origin and role

Role	Gender	Bid (yen)					Mean	Median
		0	200	400	600	800		
Player A	Male	12	5	2	1	3	208.7	0
	Female	4	1	2	2	5	442.9	500
Player B	Male	13	8	4	1	2	192.9	200
	Female	6	1	0	0	1	125	0

Table 4: Bid distribution by gender and role

subjects were significantly more risk loving than female subjects. This finding suggests the following two additional hypotheses. First, for the role of Player A, male subjects on average bid lower than female subjects. Second, for the role of Player B, male subjects on average bid higher than female subjects.

Table 4 reports the frequency distributions of bids separately in terms of gender and role. Holding role constant, the table shows different bidding patterns between males and females. For the Player A role, male subjects bid lower than female subjects; the mean bid of male subjects is 208.7 yen whereas that of female subjects is 442.9 yen. The latter is significantly higher than the former at a 5% significance level, based on a one-tailed Wilcoxon rank-sum test ( $p$ -value = 0.02594). For the Player B role, male subjects on average bid slightly higher than female subjects (192.9 yen versus 125 yen). A one-tailed Wilcoxon rank-sum test failed to reject the null hypothesis of no difference at any conventional significance level ( $p$ -value = 0.1276).

## 5. Conclusion

This paper contributes to the experimental literature of all-pay auctions (Dechenaux et al., 2014) by shedding some light on whether differences in role origin influence bidding behavior in the all-pay auction in which two bidder roles were treated asymmetrically in case of a tie. The experiment manipulated how these two roles were allocated to subjects. No evidence was found to reject the hypothesis of no difference in bidding behavior between when the right to acquire the strong bidder role is earned and when it is windfall. Instead, the results show that females bid in a more risk-averse manner than males.

There are two possible reasons why the manipulation of role origin failed to induce significant variations in bidding behavior. First, differences in the two role allocation procedures may be neither large nor clear enough to give birth to different behavioral rules indicating how each role should bid. Second, differences between the two bidder roles may be too small to recognize due to the set of parameter values used in the experiment; in equilibrium, both bidders should bid in the same manner, and the unfair tie breaking rule comes into play with probability 0.2. Revising these aspects of the design is left for future research.

## References

- Abeler, J., A. Falk, L. Goette, and D. Huffman (2011) "Reference points and effort provision." *American Economic Review* 101, 470-492.
- Arnold, T. B. and J. W. Emerson (2011) "Nonparametric goodness-of-fit tests for discrete null distributions." *The R Journal* 3:2, 34-39.
- Aumann, R. J. and M. Maschler (1972) "Some thoughts on the minimax principle." *Management Science* 18, 55-63.
- Charness, G. and U. Gneezy (2012) "Strong evidence for gender differences in risk taking." *Journal of Economic Behavior and Organization* 83, 50-58.
- Coller, M. and M. B. Williams (1999) "Eliciting individual discount rates." *Experimental Economics* 2, 107-127.
- Croson, R. and U. Gneezy (2009) "Gender differences in preferences." *Journal of Economic Literature* 47, 448-474.
- Dechenaux, E., D. Kovenock, and R. M. Sheremeta (2014) "A survey of experimental research on contests, all-pay auctions and tournaments." *Experimental Economics* 18, 609-669.
- Harrison, G. W. and E. E. Ruström (2008) "Risk aversion in the laboratory." *Research in Experimental Economics* 12, 41-196.
- Harsanyi, J. C. (1966) "A general theory of rational behavior in game situations." *Econometrica* 34, 613-634.
- Hoffman, E., K. McCabe, K. Shachat, and V. Smith (1994) "Preferences, property rights, and anonymity in bargaining games." *Games and Economic Behavior* 7, 346-380.
- Holt, C. A. and S. K. Laury (2002) "Risk aversion and incentive effects." *American Economic Review* 92, 1644-1655.
- Konrad, K. (2009) *Strategy and Dynamics in Contests*. Oxford University Press.
- Moffatt, P. G. (2015) *Experimentics: Econometrics for Experimental Economics*. Palgrave Macmillan.
- Otsubo, H. (2015) "Nash equilibria in a two-person discrete all-pay auction with unfair tie-break and complete information." *Economics Bulletin* 35, 2443-2454.



# 創価大学経済学会会則

第1条 本会は創価大学経済学会と呼ぶ。

第2条 本会は経済学およびこれに関連する諸科学の研究および教育の促進を目的とする。

第3条 本会は次の事業を行なう。

1. 研究会の開催
2. 機関誌の発行
3. その他本会の目的を達成するために適当な事業

第4条 本会の会員は、次の4種類とする。

1. 正会員 本学の教授、准教授、専任講師および助教、なお創価女子短期大学の教員で入会を希望し総会の承認をえた者
2. 準会員 本会正会員経験者で総会の承認をえた者
3. 賛助会員 本会の趣旨に賛同し、総会の承認をえた者
4. 学生会員 本学の大学院経済学研究科経済学専攻の学生で、入会を希望し総会の承認をえた者

第5条 機関誌の発行にあたっては、掲載・編集規定に従う。

第6条 会員は各種の会合に出席することができる。

第7条 会員は所定の会費を納めなければならない。

第8条 通常総会は毎年春1回、臨時総会は必要に応じ、会長がこれを招集する。

第9条 総会は正会員の過半数によって成立し、出席者の過半数によって決議される。

第10条 本会を運営するため、経済学部長を会長とし、委員若干名からなる委員会をおく。

第11条 委員は正会員の中からこれを互選する。委員の任期は2年とし、再選を妨げない。  
ただし、連続した再任期間は4年を超えないものとする。

第12条 委員会は毎年度の事業計画および実績報告書、ならびに会計予算書および決算書を総会に提出し、承認をえなければならない。

第13条 委員会は、第3条の事業に必要な事業を行なう。会長は委員会を統轄し、本会を代表する。

第14条 本会の会計を監査するため、委員以外の正会員の中から監事を選出する。

第15条 監事の任期は1年とし、再選を妨げない。

第16条 この会則の実施に関し、必要な細目は別に総会の承認をえてこれを規定する。

第17条 この会則および諸規定の改廃は総会の決議にしたがう。

## 付 則

第1条 本会の事務所を創価大学経済学部内におく。

第2条 本会の会計年度は4月1日に始まり、翌年3月31日に終わる。

第3条 この会則は昭和46年9月22日よりこれを実施する。

第4条 一部改正 昭和49年5月24日。

第5条 一部改正 昭和59年4月27日。

第6条 一部改正 昭和60年4月19日。

第7条 一部改正 昭和63年4月15日。

第8条 一部改正 平成5年5月21日。

第9条 一部改正 平成7年11月10日。

第10条 一部改正 平成16年5月14日。

第11条 一部改正 平成29年5月19日。

## 規定第3号

第1条 本会の会費は正会員年額20,000円、準会員年額10,000円、賛助会員1口年20,000円、学生会員のうち大学  
院生前期課程5,000円（2年分）、後期課程7,500円（3年分）とする。

創価大学経済学会正会員（五十音順）

Edwin ALOIAU	杉 本 一 郎
□浅 井 学	高 木 功
石 井 健 司	近 貞 美津子
石 井 秀 明	△寺 西 宏 友
碓 井 健 寛	○中 田 大 悟
大 坪 弘 教	西 浦 昭 雄
掛 川 三千代	西 田 哲 史
○金 澤 伸 幸	長谷部 秀 孝
加 納 直 幸	馬 場 善 久
●勘 坂 純 市	増 井 淳
神 立 孝 一	Raymond YASUDA
小 崎 晃 義	○安 武 妙 子
小 林 孝 次	山 崎 勝
◎齋 藤 之 美	
坂 本 幹 雄	
○佐久間 貴 之	

●印は会長  
 ◎印は編集委員長  
 □印は副編集委員長  
 ○印は編集委員  
 △印は監事



季刊 創価経済論集 第49巻 第1・2・3・4号

---

令和2年3月31日 発行

編集・発行人

創 価 大 学 経 済 学 会

東京都八王子市丹木町1-236

(042) 691-2211 (代)

会 長 勘 坂 純 市

編集委員長 齋 藤 之 美

印 刷

株 式 会 社 紀 伊 國 屋 書 店

---



# THE SOKA ECONOMIC STUDIES QUARTERLY

***THE SOKA ECONOMIC STUDIES: VOL. XLIX NO. 1·2·3·4/MARCH 2020***

## *Special Issue in Honor of Professor Kunio KAMA's Retirement*

Honoring Professor Kunio KAMA in His Retirement ..... Junichi KANZAKA (iii)

Honoring Professor Kunio KAMA in His Retirement:  
A Distinguished Scholar Devoting His Life to Academic Research ..... Koji KOBAYASHI (v)

## *Articles*

Numerical Analysis of the Overlapping Generations Models ..... Kunio KAMA (1)

Pontryagin-Type Maximum Principle ..... Yukio ITAGAKI (13)

Effects of Climate Change on Sri Lankan Rice Production and Economy  
—Applied General Equilibrium Approach—  
..... Konomi SAITO, Katsuhiro SAITO, Hideyasu SATO  
and Chatura Sewwandi WIJETUNGA (39)

Asymptotic Theory for Robust Autocorrelation Test under Stochastic Volatility  
..... Manabu ASAI (55)

Analyzing Sunspot Number via Gegenbauer Long Memory Process  
with Correlated Additive Noise ..... Manabu ASAI (77)

The Effect of Role Origin on Bidding Behavior in an Asymmetric All-Pay Auction:  
An Experiment ..... Hironori OTSUBO (87)